Inż. WŁADYSŁAW TAKLIŃSKI
Profesor Akademii Górniczej w Krakowie

tego wyd.

MECHANIKA TEORETYCZNA

Tom II.

KINEMATYKA

Nakładem Sekcji Wydawniczej
Stowarzyszenia Studentów Akademii Górniczej

Kraków 1945

Inż. Władysław Takliński
Profesor Akademii Górniczej w Krakowie.

M e c h a n i k a   T e o r e t y c z n a

K I N E M A T Y K A

Tom II.

Nakładem Sekcji Wydawniczej
Stowarzyszenia Studentów Akademii Górniczej
K r a k ó w 1945.

Rozdział I.
POJĘCIA PODSTAWOWE KINEMATYKI PUNKTU MATERIALNEGO.

Kinematyka rozpatruje ruch niezależnie od przyczyn,które ten ruch wywołują.Tena dział mechaniki ogólnej jest oparty wyłącznie na prawach,będących podstawami geometrii.

Ruch ciała badamy na podstawie zmian odległości jego punktów od punktów jakiegobądź innego ciała.W zależności od tego,czy to ciało znajduje się w stanie spoczynku,czy też ruchu,nazywamy ruch pierwszego ciała bezwzględnym, albo względnym.

W pierwszych rozdziałach będziemy rozpatrywać wyłącznie ruch bezwzględny.

Ruch bezwzględny punktu polega na kolejnym przesuwaniu się jego położenia w sposób ciągły przez poszczególne punkty przestrzeni.

Poruszający się punkt zakreśla w przestrzeni ciągłą krzywą zwaną torem punktu.Tor punktu jest zatym geometrycznym miejscem położeń punktu podczas jego ruchu.

Gdy punkt poruszając się pozostaje stale w pewnej płaszczyźnie,ruch jego nazywamy płaskim, w wypadku przeciwnym mówimy,że ruch punktu jest niepłaski,czyli przestrzenny.Poznamy jeszcze inny podział ruchu w zależności od rodzaju toru punktu.

Gdy tor punktu jest linią prostą,wtedy ruch nazywamy prostoliniowym.W każdym innym wypadku mówimy,że ruch jest krzywoliniowy.Ruch krzywoliniowy,którego torem jest koło,nazywa się ruchem obrotowym.Ruch nazywamy eliptycznym, parabolicznym, cykloidalnym, śrubowym i t.p.,jeżeli tor jest elipsą,parabolą,cykloidą,śrubą i t.p.

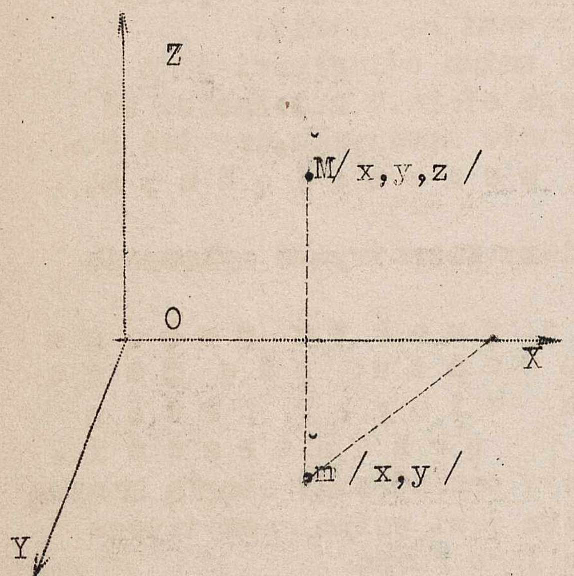
Ruch punktu uważamy jako <u>określony</u> wtedy,gdy możemy w każdym momencie wskazać położenie jego w przestrzeni.Czas liczymy od pewnego momentu,np.od 12 godz.1 stycznia,uważając ten moment jako początkowy.Jako jednostkę czasu bierzemy np.1 sek. Jeżeli rozpatrywany moment następuje po momencie początkowym to liczbę t sek.pomiędzy momentem początkowym,a rozpatrywanym uważamy jako dodatnią.Jeżeli zaś rozpatrywany moment wyprzedza moment przyjęty jako początkowy,wtedy liczbę t sek. pomiędzy tymi momentami uważamy,jako ujemną.

Ruch punktu możemy określić dwoma sposobami:

1/ za pomocą równań ruchu skończonych i
2/ za pomocą toru i równania ruchu pomiędzy drogą, a czasem.

Sposób pierwszy polega na tym, iż podczas ruchu punktu M jego współrzędne Kartezjańskie /x,y,z/ rys 1. zmieniają się w sposób ciągły z biegiem czasu t. Więc te współrzędne x,y,z muszą być funkcjami ciągłymi zmiennej niezależnej t, t.j.

$$x=\varphi/t/, \quad y=\psi/t/, \quad z=\chi/t/ \quad \ldots/1/$$



Rys.1.

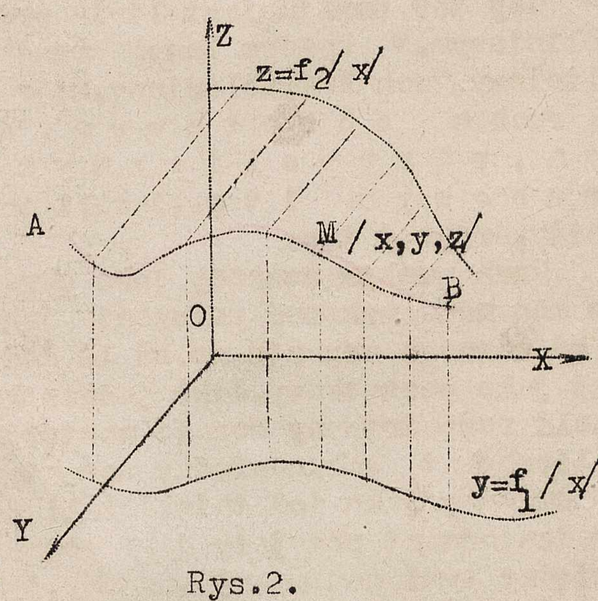
Jest rzeczą oczywistą, iż aby określić ruch punktu M /x,y,z/, wystarcza mieć trzy funkcje $\varphi/t/, \psi/t/, \chi/t/$, albowiem według nich dla każdego momentu czasu znajdziemy współrzędne punktu x,y,z, a zatym wyznaczymy położenie tego punktu M w przestrzeni. Równania /1/ nazywamy równaniami ruchu skończonymi.

Zauważymy, iż współrzędne punktu M nie koniecznie muszą być prostokątnymi Kartezjusza, lecz mogą być wogóle dowolnymi np. cylindrycznymi. Będziemy przeważnie używali współrzędnych Kartezjusza, jako najprostszych.

Eliminując czas T z trzech równań ruchu /1/, otrzymamy równania dwu powierzchni cylindrycznych:

$$y=f_1/x/, \quad z=f_2/x/ \quad \ldots\ldots/2/$$

przecinających się wzdłuż pewnej linii krzywej AB /rys.2./. Ta krzywa AB jest właśnie torem punktu M /x,y,z/.



Rys.2.

Gdy ruch jest płaski, wtedy przyjmując tę płaszczyznę, jako płaszczyznę XOY, określimy ruch punktu M/x,y/ za pomocą dwu tylko równań ruchu:

$$x=\varphi/t/, \quad y=\psi/t/ \quad \ldots/3/,$$

ponieważ trzecie równanie ruchu z=0 możemy opuścić.

Eliminując z równań /3/ czas t, otrzymamy równanie toru punktu M /x,y/:
$$y=f/x/ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/4/.$$

Jeżeli nie będziemy umieli wyeliminować czasu t z równań /3/, wtedy możemy zbudować tor punktu M według poszczególnych punktów na tym torze znajdujących się. Możemy też równania /3/ uważać, jako równania parametryczne toru punktu M /x,y/.

P r z y k ł a d I. Równania skończone ruchu są: $x = \alpha \cdot t$, $y = \beta \cdot t + \frac{gt^2}{2}$ przyczym α, β i g są stałe. Równania toru punktu napiszemy:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^2}.$$

Tor punktu jest zatym p a r a b o l ą i ruch jest paraboliczny.

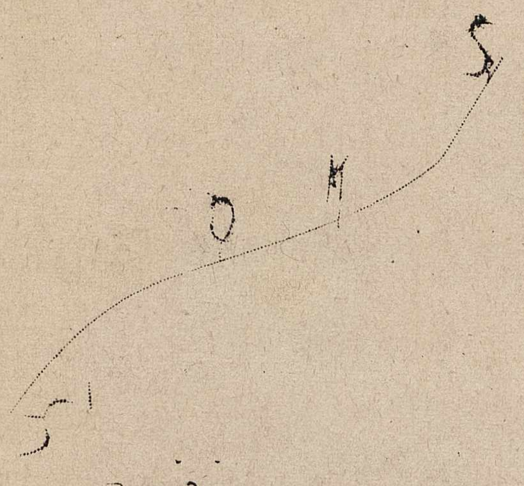
P r z y k ł a d II. $x = a \cdot \cos kt$, $y = a \cdot \sin kt$, $z = ct$.

Ruch jest przestrzenny, równania toru są: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = \frac{c}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ Tor punktu jest więc linią ś r u b o w ą a sam ruch ruchem śrubowym.

P r z y k ł a d III. Równania skończone ruchu: $r = a \cdot t$, $\theta = kt$, a i k są stałe. Równania ruchu są w współrzędnych biegunowych /r,θ/. Równania toru punktu M /r,θ/ będzie $r = \frac{a}{k} \theta$. Tor jest więc linią spiralną Archimedesa.

Sposób drugi określenia ruchu punktu jest sposobem toru. Niechaj będzie dany tor. Ten tor punktu nie określa jednak w zupełności ruchu punktu, albowiem pozostaje nieznanym sposób, w jaki punkt M porusza się po tym torze.

Aby określić tę okoliczność postępujemy następująco: obieramy na torze S'S /rys.3./ dowolny punkt O, który uważamy, jako początek drogi i przyjmujemy jeden z kierunków na torze od punktu O począwszy, jako dodatni, a przeciwny jako ujemny /np. na rys 3. kierunek od o ku S jest dodatni, a od O ku S'-ujemny/. Wtedy położenie każdego punktu M na torze SS' określi się za pomocą dodatniej, czy ujemnej liczby, której wartość bezwzględna jest równa długości łuku toru SS' od punktu O do punktu rozpatrywanego M. Tę liczbę będziemy nazywali d r o g ą, a oznaczać ją będziemy przez literę "s". Każdemu położeniu punktu M poruszającemu się wzdłuż toru SS', możemy podporządkować określoną wartość liczby s, i odwrotnie. Z biegiem



Rys.3.

czasu położenie punktu M na torze SS', zmienia się w sposób ciągły, a zatym zmienia się w sposób ciągły droga s, określająca położenie punktu ruchomego M t.j. s jest funkcją ciągłą czasu t:

$$s = F / t / \qquad ..../5/$$

Związek /5/ n a z y w a m y r ó w n a n i e m r u c h u p u n k t u n a t o r z e , czyli krótko prawem d r ó g .

Gdy dla jakiego bądź ruchu są dane: /graficznie/, początek drogi, kierunek dodatni na torzei prawo dróg, wtedy ruch punktu jest w zupełności określony, ponieważ w każdym momencie czasu t położenie punktu jest nam znane.

P r z y k ł a d y: torem punktu może być linia prosta, a lbo łukowa, albo linia śrubowa; równania punktu ruchu na torze mogą być: $s = a+bt$; $s= a + bt+ ct^2$, $s=a \sin kt$ /a, b, c i k - stałe/.

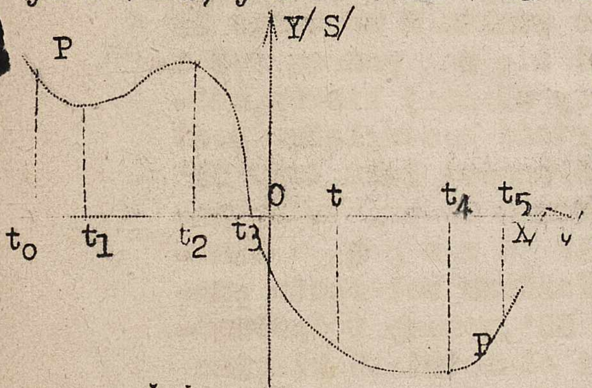
Łatwo zdać sobie sprawę o charakterze ruchów.

Aby uwidocznić charakter ruchu punktu posługujemy się t.zw. k r z y w ą d r ó g , czyli w y k r e s e m r u c h u:

Odkładamy według obranej skali wzdłuż osi odciętych OX liczby t, a wzdłuż osi rzędnych OY odpowiednie wartości s, otrzymane z prawa dróg /5/. Geometryczne miejsce wyznaczonych w ten sposób punktów na płaszczyznie XOY będzie właśnie krzyw ą dróg PP danego ruchu. Równanie krzywej dróg w współrzędnych xy otrzymamy z prawa dróg za pomocą zamiany t i s odpowiednio przez x i y. Za tym równanie krzywej dróg, na zasadzie równania /5/, będzie:

$$y = F / x /.$$

W przykładach wyżej podanych krzywymi dróg odpowiednio są: linia prosta, parabola i sinusoida; ich równania: $y= a + bx$, $y = a + bx + cx^2$ i $y = a.\sin kx$.



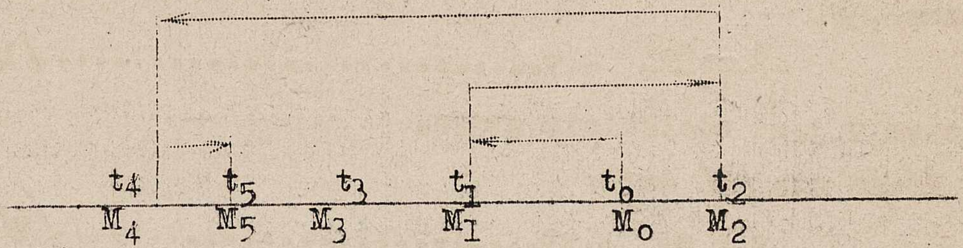
Rys.4.

Gdy krzywa dróg jest wykreślona, to posiadając tor z łatwością możemy badać, ruch punktu, np. jeżeli krzywa dróg ma kształt przedstawiony na rys.4., a torem jest linia prosta, to ruch punktu odbywa się w sposób następujący: od położenia M_o w momencie t_o punkt M porusza się w lewo

do punktu M_1, następnie w prawo do punktu M_2, dalej w lewo przez punkt M_3 aż do punktu M_4 i wreszcie w prawo do punktu M_5 w momencie t_5.

W zależności od prawa dróg $s=F(t)$, ruch punktu możemy podzielić na ruch j e d n o s t a j n y i ruch z m i e n n y.

Rys.5.



Ruch p u n k t u n a z y w a m y j e d n o s t a j n y m, gdy d r o g i z a k r e ś l o n e p r z e z punkt s ą p r o p o r c y a l n y m i d o c z a s u, u ż y t e g o n a i c h p r z e b y c i e, i g d y p r ó c z t e g o r u c h o d b y w a s i ę s t a l e w j e d n y m i t y m s a m y m k i e r u n k u. Jeżeli chociażby jeden z powyższych warunków nie jest spełniony, wówczas ruch punktu nazywamy z m i e n n y m.

R o z d z i a ł II.

J e d n o s t a j n y r u c h p u n k t u, j e g o p r a w o d r ó g i j e g o p r ę d k o ś ć.

W t y m rozdziale rozpatrzymy jednostajny ruch punktu w zdłuż toru dowolnego, a więc wzdłuż toru prostoliniowego. Udowodnimy przedewszystkiem następujące twierdzenie

P r a w o d r ó g d l a j e d n o s t a j n e g o r u c h u p u n k t u w y r a ż a s i ę l i n i o w ą f u n k c j ą c z a s u i odwrotnie r u c h p u n k t u k t ó r e g o p r a w o d r ó g w y r a ż a s i ę z a p o m o c ą l i n i o w e j f u n k c j i c z a s u, j est r u c h e m j e d n o s t a j n y m.

Rzeczywiście, niech s_0 i s będą drogami odpowiadającymi położeniom punktu ruchomego w momentach czasu 0 i t, ponieważ

ruch odbywa się w jednym i tym samym kierunku, różnica dróg $s-s_0$ wskazuje na drogę, odbytą przez punkt w czasie t. Ale według definicji ruchu jednostajnego, drogi zakreślone przez punkt są proporcjonalnymi do czasu, użytego na ich przebycie, więc mamy, że:

$$\frac{s - s_0}{t} = v \quad \text{/1/}$$

przy czym v jest wielkością stałą.

Równanie /1/ daje:

$$s = s_0 + vt \quad \text{/2/}$$

co udowadnia pierwszą część twierdzenia.

Odwrotnie, przypuśćmy że dla pewnego ruchu punktu prawo dróg jest dane w postaci funkcji liniowej czasu t

$$s = a + bt \quad \text{/3/},$$

przy czym a i b są stałe. Nadajemy czasowi t dowolny przyrost Δt, wtedy droga s otrzyma pewien przyrost Δs. Wstawiając w równanie /3/ nowe wartości czasu i drogi, otrzymamy:

$$s + \Delta s = a + b(t + \Delta t) \quad \text{/4/},$$

Odejmując stronami równość /3/ od równości /4/, a następnie dzieląc otrzymany wzór przez Δt otrzymamy:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = b \quad \text{/5/}.$$

Otrzymana równość mówi nam, iż droga Δs zakreślona przez punkt w ciągu dowolnego czasu Δt jest proporcjalną do czasu, a więc prawo dróg /3/ odpowiada ruchowi jednostajnemu, co udowadnia drugą część twierdzenia.

Możemy zatym twierdzić, iż **dla jednostajnego ruchu punktu i tylko dla niego prawo dróg wyraża się za pomocą liniowej funkcji czasu.**

Z równania /1/ widzimy, że s_0 jest to droga odpowiadająca momentowi czasu, przyjętemu jako początkowy; podobne znaczenie ma "a", t.j. wyrazy wolne funkcji liniowej, wyrażającej prawo dróg jednostajnego ruchu punkty, nazywamy **drogą początkową.**

Rozpatrzmy teraz współczynniki przy t: v w równaniu /2/ i b w równaniu /3/; te współczynniki dają nam wartość wiel-

koś ci, zwanej prędkością r u c h u j e d n o s t a j n e g o .Przypuśćmy że momentom t_1 i t_2 odpowiadają drogi s_1 i s_2, w tedy równanie /2/ daje:

$$s_1 = s_0 + vt_1 \quad i \quad s_2 = s_0 + vt_2,$$

skąd otrzymujemy, iż:

$$s_2 - s_1 = v/t_2 - t_1/, \text{czyli } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \ldots /6/.$$

Przedewszystkiem zauważymy, że /6/ jest uogólnieniem równości /1/ i, że /6/ wyraża to samo o v, co /5/ o b; dlatego na zasadzie wzroru /6/ i /5/ możemy podać następujące określenie prędkości ruchu jednostajnego: p r ę d k o ś ć r u c h u j e d n o s t a j n e g o j e s t t o s t o s u n e k d r o g i , z a k r e ś l o n e j p r z e z p u n k t w c i ą g u d o w o l n e g o c z a s u , d o t e g o c z a s u.

Jeżeli weźmiemy, taki jednostajny ruch punktu, że

przy $t_2 - t_1 = 1$ jest $s_2 - s_1 = 1$,

to dla tego ruchu równanie /6/ da nam $v = 1$;

ta okoliczność wzkazuje, że j e d n o s t k a p r ę d k o ś c i j e s t t o p r ę d k o ś ć t a k i e g o r u c h u j e d n o s t a j n e g o , p o d c z a s k t ó r e g o w c i ą g u j e d n o s t k i c z a s u p u n k t zakreśla drogę równą t e j j e d n o s t c e.

Z powyższego widzimy, że jednostka prędkości jest jednostką złożoną, zależną od wyboru jednostek czasu i długości, mianowicie:

$$\text{jednostka prędkości} = \frac{\text{jednostka długości}}{\text{jednostka czasu}} = L.T^{-1},$$

jeżeli L oznacza długość a T czas.

W jednostkach CGS prędkość wyrazi się przez CS^{-1}.

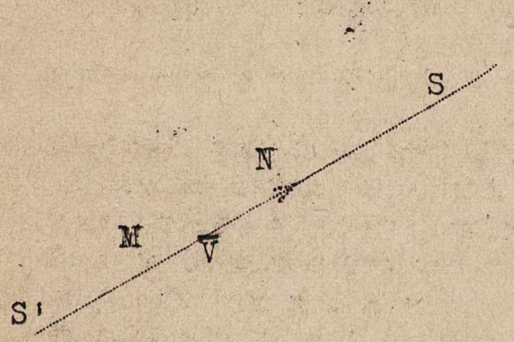
Zauważymy, że równanie /6/ przy $t_2 - t_1 = 1$ daje $v = s_2 - s_1$,

co wskazuje, że l i c z e b n i e p r ę d k o ś ć r u c h u j e d n o s t a j n e g o j e s t r ó w n ą d ł u g o ś c i p r z e s u n i ę c i a p u n k t u w c i ą-

gu j e d n o s t k i c z a s u.

Prędkości ruchu jednostajnego oprócz wielkości v nadaje się jeszcze p e w i e n k i e r u n e k.

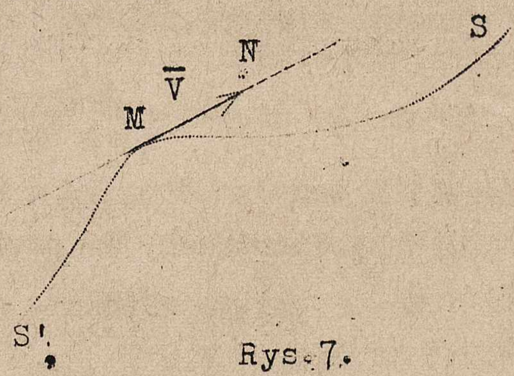
Gdy ruch punktu jest prostoliniowy wtedy wybieramy według jakiejś skali odcinek prostej,który będzie przedstawiać wielkość prędkości v,i odkładamy go od położenia punktu na torze wzdłuż prostej toru w kierunku ruchu punktu / /rys.6./.Otrzymany w ten sposób wektor $\overline{MN} = v$ będzie przedstawiał geometrycznie prędkość punktu M co do wielkości i kierunku.Kierunek wektora - prędkości v nazywamy kierunkiem samej prędkości.



Rys.6.

Przypuśćmy teraz,że tor punktu M jest k r z y w o l i n i o w y /rys.7/ i,że punkt M porusza się w kierunku S;ponieważ nieskończenie mały łuk toru zlewa się ze styczną,przeprowadzaną przez początek tego łuku,to wektor-prędkość v musimy skierować wzdłuż stycznej do toru SS' w punkcie M, przy tym w tę stronę,którą porusza się nasz punkt.

W w y p a d k u r u c h u k r z y w o l i n i o w e g o ,j e d n o s t a j n e g o w e k t o r - p r ę d k o ś ć n i e z m i e n i a s w e j w i e l k o ś c i ,l e c z z m i e n i a k i e r u n e k; w w y p a d k u r u c h u p r o s t o l i n i o w e g o j e d n o s t a j n e g o w e k t o r - p r ę d k o ś ć p o z o s t a j e s t a ł y m c o d o w i e l k o ś c i i k i e r u n k u.



Rys.7.

Zauważymy jeszcze,że jeżeli w równaniu /6/ moment czasu t_2 będziemy uważać jako późniejszy,a moment t_1 wcześniejszy,to przy $s_2 - s_1 > 0$ otrzymamy $v > 0$, a przy $s_2 - s_1 < 0$,otrzymamy $v < 0$.

Więc podczas ruchu jednostajnego w kierunku dodatnim na rze prędkość v jest dodatnia, a podczas ruchu w kierunku ujemnym - ujemna.

Dla tego też k i e r u n e k w e k t o r a - p r ę d k o ś c i v j e s t n i e t y l k o k i e r u n k i e m p r ę d k o ś c i, l e c z i k i e r u n k i e m r u c h u p u n k t u.

R o z d z i a ł III.

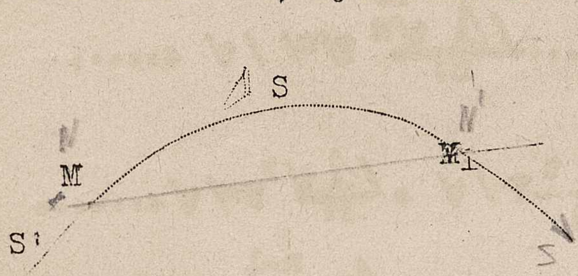
Z m i e n n y r u c h p u n k t u, j e g o p r a w o d r ó g, p r ę d k o ś ć i p r z y s p i e s z e n i e.

W poprzednim rozdziale udowodniliśmy, że cechą charakterystyczną ruchu jednostajnego jest liniowa postać prawa dróg. Dlatego definicję ruchu zmiennego, podaną w końcu rozdziału 1, możemy zastąpić następującą: z m i e n n y r u c h p u n k t u j e s t t o t a k i r u c h, k t ó r e g o p r a w o d r ó g n i e w y r a ż a s i ę f u n k c j ą l i n i o w ą c z a s u. Badając ogólne zagadnienia zmiennego ruchu punktu, będziemy wyrażać prawo dróg równaniem:

$$s = F/t/ \ldots\ldots\ldots\ldots /1/,$$

przy czym $F/t/$ jest dowolną, nie liniową funkcją czasu.

Przypuśćmy, że w momencie czasu t punkt poruszający się wzdłuż toru S'S ruchem zmiennym, którego prawo dróg jest /1/ znajduje się w punkcie M /rys. 8/, po upływie przyrostu czasu Δt, t.j. momencie $t + \Delta t$ punkt przesunął się w nowe położenie M_1. Przyrost czasu Δt bierzemy dowolny, ale taki, aby w ciągu niego kierunek ruchu punktu na torze nie uległ zmianie.



Rys. 8.

Wyobraźmy sobie, że wzdłuż tegoż toru S'S porusza się jeszcze inny punkt ruchem jednostajnym i przy takim, iż w momentach czasu t i $t + \Delta t$ ten drugi punkt zajmuje położenia M i M_1. Oznaczając długość łuku toru po-

między punktami M i M_1 przez Δs, na podstawie równania /1/ będziemy mieć :

$$s + \Delta s = F(t + \Delta t)$$

a po odjęciu stronami /1/, znajdziemy:

$$\Delta s = F(t + \Delta t) - F(t).$$

Ponieważ drugi punkt porusza się jednostajnie, jego prędkość wyznaczymy z wzoru:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad ..../2/$$

Prędkość V wyobrażonego drugiego punktu względem punktu pierwszego nazywamy j e g o ś r e d n i ą p r ę d k o ś c i ą o k r e s u c z a s u Δt. Możemy zatym powiedzieć, że ś r e d n i ą p r ę d k o ś c i ą p u n k t u , p o r u s z a j ą c e g o s i ę r u c h e m z m i e n n y m , d a n e g o o k r e s u c z a s u n a z y w a m y p r ę d k o ś ć r u c h u j e d n o s t a j n e g o t a k i e g o p u n k t u , k t ó r y p o r u s z a j ą c s i ę w z d ł u ż t e g o ż s a m e g o t o r u , c o i p u n k t d a n y , z a j m u j e w p o c z ą t k u i k o ń c u d a n e g o o k r e s u c z a s u j e d n a k o w e z n i m p o ł o ż e n i a.

Stwierdzamy więc, że prędkość średnia v jest jednocześnie funkcją t i Δt i że dla różnych momentów t i dla różnych okresów czasu Δt, prędkość v wogóle jest różną. Na zasadzie wzoru T a y l o r a mamy:

$$F(t + \Delta t) = F(t) + \frac{\Delta t}{1!} F'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} F''(t) + ... + \frac{(\Delta t)^n}{n!} F^{(n)}(t) + ...$$

skąd

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = F'(t) + \frac{\Delta t}{2!} F''(t) + \frac{(\Delta t)^2}{3!} F'''(t) + ... + \frac{(\Delta t)^{n-1}}{n!} F^{n}(t) + ... /3/$$

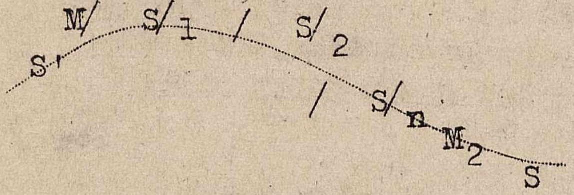
A na zasadzie wzoru /2/, otrzymujemy:

$$v = F'(t) + \frac{\Delta t}{2!} F''(t) + ... + \frac{(\Delta t)^{n-1}}{n!} F^{n}(t) + ... /3/.$$

Z wzoru /3/ wnioskujemy, że 1/ v mogłoby nie być funkcją czasu t, gdyby $F'(t)$, $F''(t)$, ..., byłyby wielkościami stałymi; ale podobnych przypuszczeń robić nie możemy, albowiem z założenia, iż $F'(t) = C_1$ przy czym C_1 jest pewną stałą, wynika, że $F(t)$ jest funkcja liniową czasu $C_1 t + C_2$, co przeczy przypuszczeniu zmienności ruchu punktu; 2/ v mogłoby nie być funkcją przyrostu czasu Δt, gdyby było $F''(t) = F'''(t) = 0$ ale założenie $F''(t) = 0$ pociąga za sobą warunek, iż $F'(t) = C_1$ skąd $F(t) = C_1 t + C_2$ co znowu przeczy zmienności ruchu.

A zatym średnia prędkość danego okresu czasu jest jednocześnie funkcją tego okresu czasu i momentu początkowego, określającego ten okres.

Obierzemy na torze S'S /rys.9/ dowolną jego część, np. $M_1 M_2$ i oznaczymy przez t_1 i t_2 momenty czasu w których punkt ruchomy znajduje się w położeniu M_1 i M_2. Ponieważ ruch punktu jest zmienny, jest rzeczą możliwą iż punkt przechodząc z położenia M_1 w położenie M_2, porusza się nie zawsze w jednym kierunku, lecz zmienia kierunek swego ruchu. Dlatego podzielimy okres czasu $t_2 - t_1$ na takie części Δt_1, Δt_2, ... Δt_n, aby w ciągu każdej z nich punkt nie zmieniał kierunku swego ruchu.



Rys.9.

Zakładając, że:

$$T_2 = T_1 + \Delta t_1,\ T_3 = T_2 + \Delta t_2, \dots ; T_n = T_{n-1} + \Delta t_{n-1}$$

otrzymamy, iż $t_2 = T_n + \Delta t_{n-1}$.

Średnie prędkości $_1$,.... $_n$ dla okresów czasu Δt_1, Δt_2, ... Δt_n będą odpowiednio

---

Takliński. Mechanika teoretyczna

$$V_1 = \frac{/\Delta s/_1}{/\Delta t/_1} = \frac{F\left[t_1 + /\Delta t/_1\right] - F/t/_1}{/\ t/_1},$$

$$v_2 = \frac{/\Delta s/_2}{/\Delta t/_2} = \frac{F\left[T_2 + /\Delta t/_2\right] - F/T_2/}{/\ t/_2} \ldots\ldots$$

i analogicznie $\ldots\ldots\ldots\ldots v_n = \frac{/\Delta s/_n}{/\Delta t/_n} = \frac{F\left[T_n + /\Delta t/_n\right] - F/T_n/}{/\Delta t/_n}$

ponieważ prędkości $V_1, \ldots V_n$ w ogólności nie są sobie równe, to punkt wyobrażany poruszający się w ciągu każdego okresu czasu $/\Delta t/_1, /\Delta t/_2, \ldots /\Delta t/_n$ równomiernie z prędkościami wyżej napisanymi, musi w końcu każdego okresu zmieniać gwałtownie swą prędkość. Zatym ruch tego punktu w ciągu czasu od momentu t_1 do t_2 będzie zmiennym, a w ciągu każdego okresu $/\Delta t/_1 \ldots\ldots /\Delta t/_n$ - jednostajnym. Biorąc następnie pod uwagę, że dany punkt rzeczywisty w momentach czasu $T_1, T_2, T_3, \ldots T_{n-1}, T_n, t_2$ zajmuje na torze te same położenia co i punkt wyobrażony, wnioskujemy, że przy zwiększaniu liczby n okresów $/\Delta t/_1, \ldots /\Delta t/_n$ i zmniejszaniu jednoczesnym samych okresów w granicy punkt wyobrażony będzie zawsze zajmował położenie zgodne z położeniem punktu rzeczywistego. Więc **zmienny ruch punktu możemy uważać jako złożony z nieskończenie dużej liczby kolejnych ruchów jednostajnych z pośród, których każdy trwa nieskończenie krótko. Prędkość danego punktu w danej chwili nazywamy jego średnią prędkość w ciągu nieskończenie małego okresu czasu, który ten moment zawiera.**

Oznaczając przez v prędkość danego punktu w chwili t, możemy napisać, że:

$$v = \lim V = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{F/\ t + \Delta t/ - F/t/}{\Delta t} \ldots\ldots /4/$$

a wprowadzając znakowania rachunku różniczkowego, będziemy mieć:

granica prędkości średniej gdy $\Delta t \to 0$ naz. prędkością chwilową

$$v = \frac{ds}{dt} = F'/t/ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

t.j. prędkość punktu w danej chwili wyraża się jako pierwszą pochodną drogi względem czasu.

Równanie /5/ nazywamy równaniem prędkości punktu ruchomego.

W rozdziale 11, badając ruch jednostajny, znaleźliśmy wyrażenie /5/ jego prędkość $v = \frac{s}{t}$. Obecnie mamy wzór na prędkość ruchu zmiennego w danej chwili $v = \frac{ds}{dt}$, łatwo zauważyć, że równanie pierwsze jest wypadkiem szczególnym drugiego równania: rzeczywiście prawo dróg dla ruchu jednostajnego jest $s = a + bt$, skąd z jednej strony

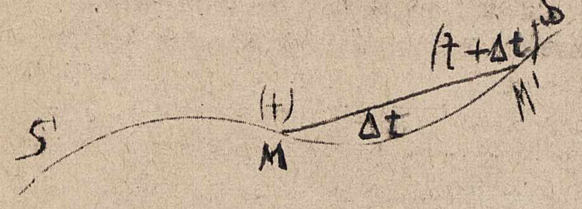
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{a + b/t + \Delta t/ \; - /a + bt/}{\Delta t} = b,$$

a z drugiej strony $\frac{ds}{dt} = /a + bt/' = b$ c.b.d.o.

Dlatego też następnie dla każdego ruchu równanie prędkości będziemy pisać następująco:

$$v = \frac{ds}{dt} = F'/t/,$$

przy czym v oznacza prędkość w danej chwili. Wprowadzając pojęcie prędkości punktu w danej chwili, ~~rozpatrywaliśmy~~ rozpatrywany pewien punkt wyobrażony, poruszający się jednostajnie, lecz nie wzdłuż toru punktu S' S, lecz wzdłuż cięciwy łuku S z prędkością:



Rys.10.

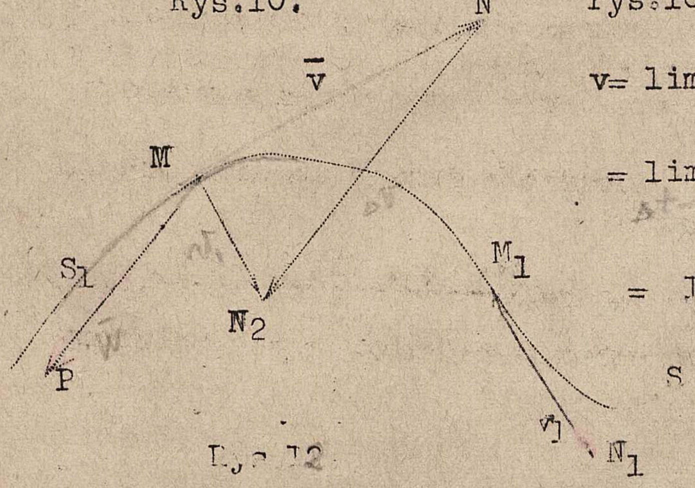
$$V' = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

mamy wtedy szereg równości: rys.10.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta t} =$$

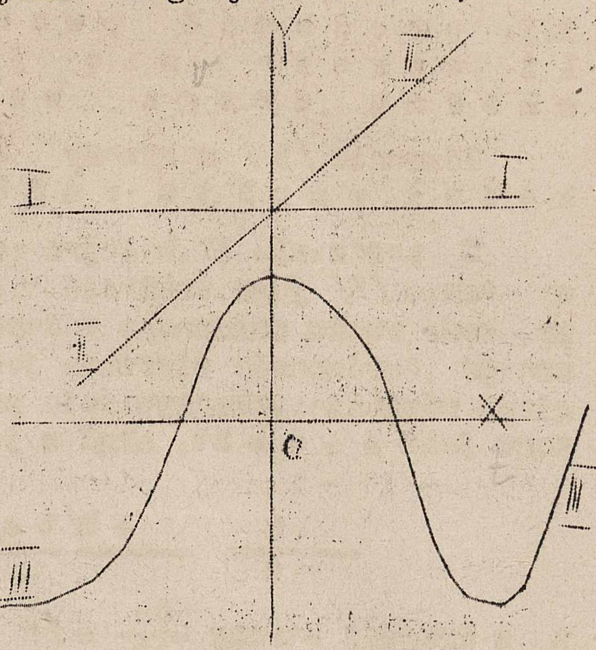
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1} \cdot \frac{MM_1}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1} \lim \frac{MM_1}{\Delta t}$$



Rys.12

pierwszy czynnik otrzymanego iloczynu równa się 1 na zasadzie rachunku różniczkowego, a czynnik drugi jest lim V', więc v = lim V'. Widzimy zatym, iż prędkość punktu w danej chwili jest nie tylko granicą średniej prędkości ruchu jednostajnego wzdłuż danego toru, a le jest także granicą średniej prędkości ruchu jednostajnego wzdłuż cięciwy danego toru. Innymi słowy, każdy ruch punktu możemy uważać, jako złożony z nieskończenie dużej liczby ruchów nieskończenie małych i jednostajnych przyczym te ostatnie mogą być prosto- lub krzywoliniowe.



Rys. 11.

Aby uwidocznić, jak zmienia się wielkość prędkości z biegiem czasu posługujemy się t. zw. **k r z y w ą   s z y b k o ś c i**, czyli **w y k r e s e m   p r ę d k o ś c i** : odkładamy według obranej skali na osi odciętych OX poszczególne wartości czasu t, a na osi rzędnych OY odpowiednie wartości pochodnej $\frac{ds}{dt}$.

Miejscem geometrycznym punktów, otrzymanych w taki sposób nazywamy **w y k r e s e m   p r ę d k o ś c i** . Oczywiście, jeżeli równanie prędkości ma postać /5/ to równanie krzywej prędkości we współrzędnych XY będzie: $y = F'(x)$.
Na rys. 11. są podane wykresy prędkości ruchów, których prawa dróg są wyrażone równaniami:

$$s = a + bt, \; (b > 0), \; s = a + bt + ct^2 \; (b > 0, c > 0),$$
$$s = a \sin kt, \; (a > 0),$$

Gdy znamy prawo dróg pewnego ruchu punktu, to równanie prędkości znajdziemy za pomocą różniczkowania. Odwrotnie, gdy mamy równanie prędkości np. $v = f(t)$, to aby znaleźć prawo dróg, musimy wyznaczyć taką funkcję czasu, w której pochodna byłaby $f(t)$, t.j. musimy uznaleźć $\int f(t)dt$. Niech $\int f(t).dt = F(t) + C$, przyczym C oznacza dowolną stałą całkowania. W tedy mamy $s = F(t) + C$.

Stosując to równanie do momentu początkowego otrzymamy:

$$s_0 = F(0) + C, \text{ dla tego ostatecznie } s = s_0 + F(t) - F(0) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Jeżeli droga początkowa jest nam znaną, wtedy równanie /6/ rozwiązuje całkowicie zadanie, t.j. określa prawo dróg.

Jeżeli zaś s_0 nie jest dane, uważamy go wtedy za dowolne, i dlatego równanie /6/ daje nieskończenie wiele rozwiązań, t.j. równanie prędkości określa nieskończenie wiele ruchów punktu różniących się od siebie drogą początkową.

Czasem prędkość punktu bywa znaną w postaci funkcji drogi s, a nie funkcji czasu. Jeżeli np. $V = \varphi/s/$, wtedy podobnie do poprzedniego otrzymujemy równości następujące:

$$\frac{ds}{dt} = \varphi/s/ \quad , \frac{ds}{\varphi/s/} = dt, \int_0^S \frac{ds}{\varphi/s/} = \int_0^t dt = t$$

oznaczając funkcję pierwotną dla $\frac{1}{\varphi/s/}$ przez $\Psi/s/$, otrzymamy, że: $\Psi/s/ - \Psi/0/ = t$

Rozwiązując to równanie względem s będziemy mieć: $s = F/t/$.

Przypuśćmy, że w momentach czasu t i $t + \Delta t$ ruchomy punkt zajmuje na torze S'S położenia M i M_1. Wykreślimy prędkość-wektor punktu w tych położeniach v i v_1, a w/g nich geometryczną różnicę $v_1 - v = \Delta v$ w postaci wektora NN_2 /rys.12./ patrz strona 13

Ten wektor NN_2 nazywamy geometrycznym przyrostem prędkości v.

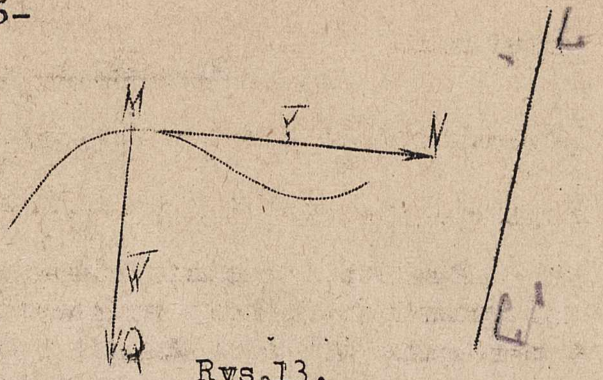
Następnie wykreślimy wektor MP przyłożony w punkcie M, równoległy do NN_2, jednakowo z nim skierowany i równy co do wielkości ilorazowi $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Otrzymany wektor będziemy oznaczać przez W, i nazywać średnim przyspieszeniem punktu okresu czasu Δt.

Zatym średnim przyspieszeniem punktu danego okresu czasu nazywamy wektor W, mający punkt zaczepienia w ruchomym punkcie, skierowany zgodnie z geometrycznym przyrostem prędkości i równy ilorazowi geometrycznego przyrostu prędkości danego okresu czasu i tego okresu.

Następnie przyspieszeniem w danej chwili nazywamy granicę do której dąży średnie przyspieszenie punktu, gdy okres czasu, zawierający dany moment dąży do zera.

Gdy Δt dąży do zera, V_1 i V zmieniając swą wielkość i kierunek dążą odpowiednio: V_1 do V, a v co do wielkości dąży do zera a co do kierunku do pewnego kierunku LL'.

Dla ego $\lim W = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = w$ przedstawi się za pomocą pewnego wektora MQ /rys.13 / mającego punkt zaczepienia w punkcie M i równoległego do kierunku LL'.



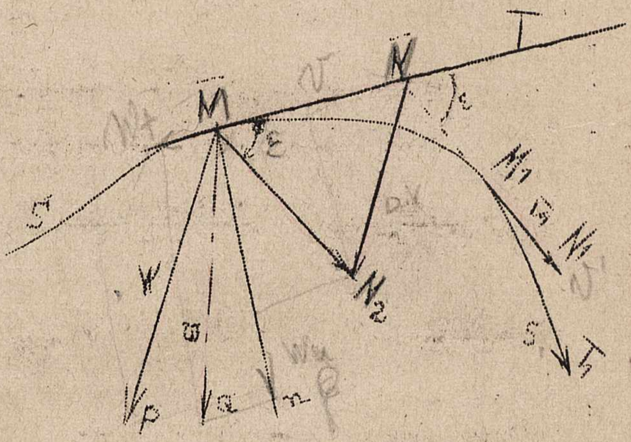
Rys.13.

Jednostka przyspieszenia jest jednostką złożoną, mianowicie :

$$\text{jenostka przyspieszenia} = \frac{\text{jednostka prędkości}}{\text{jednostka czasu}} = \frac{\text{jednostka długości}}{\text{jednostka czasu}^2} = L.T^{-2}.$$

Rozpatrzmy teraz rzuty przyspieszenia na kierunek stycznej i normalnej do toru gdy ruch punktu jest płaski.

Niech punkt ruchomy porusza się wzdłuż toru S'S /rys.14./ i w momentach czasu t i Δt zajmuje położenie M i M_1. Prędkość punktu w tych położeniach oznaczymy przez V i V_1. Znajdziemy geometryczną różnicę prędkości ΔV, przedstawioną wektorem NN_2. Średnie przyspieszenie W punktu okresu czasu Δt przedstawi się za pomocą wektora MP, równoległego do NN_2 i takiego, że



$$MP = W = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{NN_2}{\Delta t} \ldots\ldots /7/$$

Rys.14.

Przyspieszenie pinktu w chwili t jest granicą W i przedstawia się za pomocą pewnego wektora MQ.

Przeprowadzimy wreszcie normalną Mn prostopadłą do stycznej MT. Oznaczmy przez ε kąt styczności łuku MM_1, przez Δv alegbraiczną różnicę prędkości v_1 i v t.j. $v_1 = v + \Delta v$, przez w_t i w_n odpowienio rzuty przyspieszenia na kierunek stycznej i normalenj.

Stosując do linii łamanej MNN_2 i do jej zamykającej MM_2 twierdzenie rzutów, otrzymamy dla dowolnej osi rzutów równanie:

$$\text{rzut } MM_2 = \text{rzut } MN + \text{rzut } NM_2$$

ale równanie /7/ daje: $NM_2 = W.\Delta t$, więc

$$\text{rzut } MM_2 = \text{rzut } MN + \Delta t \text{ ,rzut } W,$$

skąd rzut W =

$$W = \frac{\text{rzut } MM_2 - \text{rzut } MN}{\Delta t},$$

przechodząc do granicy znajdziemy, iż:

$$\text{rzut } w = \lim \text{ rzut } W = \lim \frac{\text{rzut } MM_2 - \text{rzut } MN}{\Delta t} \qquad \text{..........} /8/$$

Ponieważ ostatnie równanie jest prawomocne dla każdej osi rzutów, obierzemy w początku, jako oś rzutu styczną MT, a następnie normalną Mn.

W wypadku pierwszym będziemy mieć:

$\text{rzut } w = w_t$, $\text{rzut } MM_2 = v_1 \cos\varepsilon = (v + \Delta v)\cos\varepsilon$, $\text{rzut } MN = v$

a w wypadku drugim:

$\text{rzut } w = w_n$, $\text{rzut } MM_2 = v_1 \sin\varepsilon = (v + \Delta v)\sin\varepsilon$, $\text{rzut } MN = 0$

Na podstawie tego równanie /8/ daje nam następujące dwa równania:

$$w_t = \lim \frac{(v + \Delta v)\cos\varepsilon - v}{\Delta t} \qquad \text{............} /9/$$

i

$$w_n = \lim \frac{(v + \Delta v)\sin\varepsilon}{\Delta t} \qquad \text{............} /10/$$

Przekształcimy równanie /9/ a mianowicie:

$$w_t = \lim\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\varepsilon - \frac{v(1-\cos\varepsilon)}{\Delta t}\right] = \lim\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\varepsilon - \frac{2v\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\Delta t}\right] =$$

$$= \lim\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\varepsilon - \frac{v}{2}\left(\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\smile MM_1}\right)^2 \cdot \frac{\smile MM_1}{\Delta t} \cdot \smile MM_1\right] = \left(\lim \frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\lim \cos\varepsilon\right) - \frac{v}{2}\left(\lim \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^2 \cdot \left(\lim \frac{\varepsilon}{\smile MM_1}\right)^2 \cdot \lim \frac{\smile MM_1}{\Delta t} \cdot \left(\lim \smile MM_1\right).$$

A le ponieważ Δt, $\smile MM_1$ i ε dążą w granicy do zera, to

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad \lim \cos\varepsilon = 1, \quad \lim \frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} = 1, \quad \lim \frac{\varepsilon}{\smile MM_1} = \frac{1}{\rho}$$

$$\lim \frac{\smile MM_1}{\Delta t} = v, \quad \lim \smile MM_1 = 0$$

przyczym linia ρ oznacza promień krzywizny toru w punkcie M. Otrzymamy zatym zamiast równania /9/ następujące:

$$w_t = \frac{dv}{dt} \qquad \text{.........................} /11/$$

Ponieważ zaś $v = \frac{ds}{dt}$ więc

$$w_t = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{.........................} /12/$$

Podobnie przekształćmy równanie /10/:

$$w_n = \lim \frac{v \sin \xi}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} . \sin \xi =$$

$$= \lim \left[v \frac{\sin \xi}{\xi} . \frac{\xi}{\overset{\frown}{MM_1}} . \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t} \sin \xi \right] = v \left[\lim \frac{\sin \xi}{\xi} \right] \left[\lim \frac{\xi}{\overset{\frown}{MM_1}} \right] \left[\lim \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{t} \right] +$$

$$+ \left[\lim \frac{\Delta v}{\Delta t} \right] . \left[\lim \sin \xi \right] ,$$

poszczególne czynniki mają następujące wartości:

$$\lim \frac{\sin \xi}{\xi} = 1 , \lim \frac{\xi}{\overset{\frown}{MM_1}} = \frac{1}{\rho} , \lim \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta t} = v , \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} ,$$

$\lim \sin \xi = 0$,

równanie /10 / przybiera postać:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ ..../13 /.}$$

Otrzymane równania /11 / i /13 / pozwalają określić przyspieszenie punktu w każdym momencie czasu,ponieważ z jednej strony mamy,

$$W = \sqrt{w_t^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^4}{\rho^2}\right)} \text{ ..../14 /,}$$

a zdrugiej strony jest:

$w_t = w.\cos /w,T/$, $w_n = w \sin /w,T/$,skąd otrzymujemy:

$$\cos /w,T/ = \frac{W_t}{w} , \cos /w,n/ = \frac{W_n}{w} \text{ ..../15/.}$$

Wzór /14 / określa wielkość przyspieszenia,a wzory /15 /- jego kierunek.Z geometrii róż niczkowej wiemy,jak się wyraża promień krzywizny,mianowicie:

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt} . \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} . \frac{d^2x}{dt^2}} ,$$

gdy równania toru SS' są:

$x = \varphi /t/$, $y = \psi /t/$, /parametryczne /,

albo też $\rho = \frac{/1 + y'^2/^{\frac{3}{2}}}{y''}$

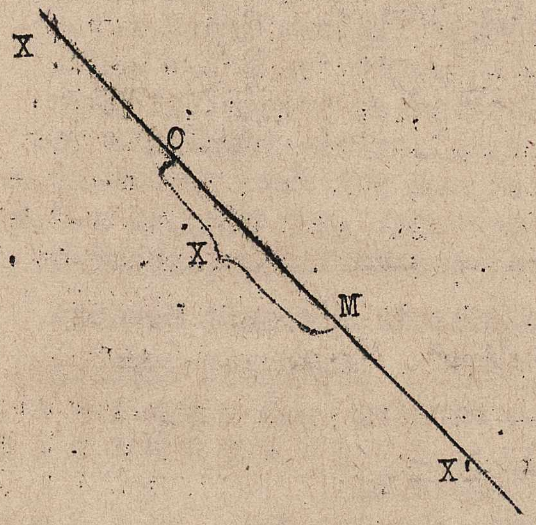
gdy równanie toru S'S jest w postaci $y = f/x/$

Składową przyspieszenia w_t często nazywa się **p r z y s p i e s z e n i e m s t y c z n y m** , a składową w_n – **p r z y s p i e s z e n i e m n o r m a l n y m** .

R o z d z i a ł I V .

P r z y k ł a d y p r o s t o l i n i o w e g o i k r z y w o l i n i o w e g o r u c h u p u n k t u m a t e r i a l n e g o .

Przypuśćmy, że punkt M /rys 15 / porusza się wzdłuż prostej XX', przyczym początek dróg znajduje się w punkcie O.



Rys. 15.

Oznaczmy przez x algebraiczną wielkość zmiennej drogi OM. Wiemy już, że wektor prędkość v jest skierowany wzdłuż prostej XX', a wielkość prędkości jest określoną za pomocą wzoru:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

który otrzymujemy z wzoru /5 / poprzedniego rozdziału zmieniając s na x .

W ykażemy teraz, że wektor p r z y s p i e s z e n i a p u n k t u p o d c z a s r u c h u p r o s t o l i n i o w e g o j e s t s t a l e s k i e r o w a n y w z d ł u ż p r o s t e j xx' . W tym celu zastosujemy wzory /12 / i /13 / poprzedniego rozdziału, ponieważ ruch prostoliniowy jest to ruch płaski. Powyższe równania przybiorą posta ć następującą: $w_t = \frac{d^2x}{dt^2}$, $w_n = 0$, albowiem krzywizna $\frac{1}{\varrho}$ linii prostej jest równą zeru.

Z tego, iż przyspieszenie normalne jest równe zeru, wnioskujemy, że ogólne pruyspieszenie punktu jest prostopadłe do normalnej t.j. jest skierowane wzdłuż stycznej. A le dla linii prostej kierunek st ycznej jest zgodny z kierunkiem samej prostej, dlatego też wtedy przyspieszenie punktu w tym wypadku jest identyczne z przyspieszeniem stycznej innymi słowy $w = w_t = \frac{d^2x}{dt^2}$, co do wielkości i jest skierowane wzdłuż prostej XX'.

Należy też zauważyć, że przyspieszenie normalene jest równe zeru wyłącznie tylko dla ruchu prostoliniowego. Rzeczywiście, jeżeli mamy $w_n = \frac{v^2}{\varrho} = 0$, to wynika, że albo $v^2 = 0$, albo też $\frac{1}{\varrho} = 0$. A le pierwsze przypuszczenie jest niemożliwe w czasie ruchu, albowiem oznacza, iż punkt

jest w spoczynku. Dla tego musi zachodzić drugie przypuszczenie t.j. $\frac{1}{\rho} = 0$ czyli, że torem punktu jest linia prosta.

Więc dla każdego ruchu prosto liniowego mamy, że:

$$v = \frac{dx}{dt} = x' \quad , \quad w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'' \quad \ldots\ldots\ldots /1/.$$

i wektory-prędkości i przyspieszenia są skierowane wzdłuż toru w tę lub inną stronę zależnie od znaku v i w.

Rozpatrzmy teraz przykłady ruchu prostoliniowego. W wypadku ruchu jednostajnego i prostoliniowego, jak zresztą dla każdego ruchu jednostajnego, prawo dróg jest funkcją liniową czasu t.j. $x = a + bt$. Na podstawie wzoru /1/, mamy $v = b$, $w = 0$. Widzimy zatym, że dla ruchu jednostajnego prostoliniowego prędkość punktu jest stałą, a przyspieszenie równa się zeru. Pierwsze z tych twierdzeń jest nam już znane. Wykażemy, że drugie, określa ruch punktu. Rzeczywiście, gdy mamy, iż $w=0$, to stąd 1/ wynika, że ruch punktu jest prostoliniowy, albowiem $w_n = 0$, i 2/, że $\frac{dv}{dt} = 0$. Ostatnie równanie oznacza nam, że $dv = 0$, czyli $=$ const. Stałość prędkości wskazuje, że ruch jest jednostajny. Zatym z warunku $w=0$ wynika, że ruch punktu jest jednostajny i prostoliniowy c.b.d.o.

Rozpatrzmy teraz ruch punktu jednostajnie zmienny.

Ruchem jednostajnie zmiennym punktu nazywamy taki ruch punktu którego prawo dróg wyraża się za pomocą funkcji całkowitej drugiego stopnia, t.j.

$$x = a + bt + ct^2 \quad \ldots\ldots\ldots /2/$$

Po zastosowaniu wzorów / 1 / otrzymujemy :

$$v = b + 2ct, \quad w = 2c \quad \ldots\ldots\ldots /3/$$

Zatym prędkość zmienia się proporcjonalnie do czasu, a przyspieszenie jego jest wielkością stałą.

Odwrotnie, jeżeli mamy, że $w = c_1$ przyczym c_1 jest stałą, to stąd otrzymujemy, że

$$\frac{dv}{dt} = c_1 \text{ t.j. } dv = c_1 dt, \text{ czyli:}$$

$v = c_1 t + c_2$ i c_2 jest nową stałą.

Zamieniając w ostatnim równaniu v przez $\frac{dx}{dt}$ znajdziemy:

$\frac{dx}{dt} = c_1 t + c_2$ czyli $dx = c_1 t dt + c_2 dt$. Po całkowaniu oznaczając przez c_3 nową stałą otrzymamy wzór:

$$x = c_3 + c_2 t + \frac{1}{2} c_1 t^2 .$$

W wypadkach więc gdy przyspieszenie jest stałe wynika, iż ruch punktu jest jednostajnie zmienny, albowiem prawo drogi jego wyraża się funkcją całkowitą drugiego stopnia. Z łatwością otrzymamy interpretację współczynników a, b i c w równaniu /2/. Zakładając w równaniach /2 / i /3 / t = 0 , znajdziemy $x_o = a$, $v_o = b$ ..../4 /

znak /o/ przy x i v wskazuje odpowiedniość tych wartości momentowi początkowemu t = 0 . Następnie drugie równanie /3 / stwierdza, iż $c = \frac{w}{2}$ ..../5 /.
Równanie /4/ i /5/ udowadnia nam, że 1/ wyraz wolny a jest drogą początkową punktu, 2/ współczynnik b przy t w pierwszej potędze jest początkową prędkością punktu i 3/ współczynnik C przy t jest połową stałej wielkości przyspieszenia punktu.

Zauważymy, że jeżeli w > 0, to ruch punku nazywamy jednostajnie przyspieszonym, a gdy w < 0, wtedy ruch punktu nazywamy jednostajnie opóźnionym. Wzór v = b + 2ct wskazuje, że w wypadku ruchu jednostajnie przyspieszonego prędkość punktu wzrasta nieograniczenie, a w wypadku jednostajnie opóźnionego maleje też nieograniczenie.

Przechodząc do badania ruchu punktu krzywoliniowego, na zasadzie tego co było powiedziane na początku niniejszego rozdziału możemy twierdzić, że kierunek prędkości i kierunek przyspieszenia w dowolnym ruchu krzywoliniowym, nie pozostają stałymi, lecz ulegają zmianie z biegiem czasu. Oprócz tego widzieliśmy, że istnieje tylko jeden ruch, mianowicie ruch jednostajny i prostoliniowy, dla którego przyspieszenie jest stale równe zeru. Dla tego, gdy ruch punktu jest krzywoliniowy , to przyspieszenie tego ruchu nie może być stale podczas ruchu być równym zero.

Jako przykład ruchu krzywoliniowego rozpatrzymy tutaj ruch obrotowy punktu.

R u c h p u n k t u n a z y w a m y o b r o t o w y m , g d y p u n k t p o r u s z a s i ę p o o b w o d z i e k o ł a . Ponieważ ruch obrotowy jest ruchem płaskim możemy więc do niego zastosować wzory /11/ do /15/. z poprzedniego rozdziału , przyczym zauważymy, że promień krzywizny koła jest równy promieniom koła t.j. = R . Wtedy otrzymujemy:

$$w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} , \quad w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad ..../6/$$

przyczym s oznacza zmienną drogę od punktu, przyjętego, jako początek dróg, aż do punktu ruchomego. W zależności od rodzaju prawa dróg s = F / t / , ruch obrotowy, jak i ruch prostoliniowy możemy podzielić:

1/ na ruch jednostajny, gdy prawo dróg ma postać $s=a+bt$ .../V/,
2/ na ruch jednostajnie zmienny, gdy $s=a+ct^2$ i wreszcie
3/ ruch zmienny, gdy funkcja $F/t/$ jest dowolną funkcją wyjątkiem dwóch poprzednich.

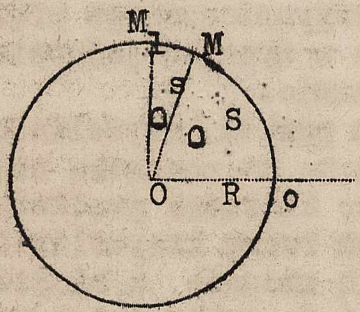
W wypadku ruchu jednostajnego obrotowego, mamy według /V/: $v=b$ i więc $\frac{dv}{dt}=0$ Dlatego też $w_t=0$ i $w_n=w=\frac{b^2}{R}$

t.j. dla rozpatrywanego ruchu punktu przyspieszenie jest stale prostopadłem do stycznej, a więc skierowanem wzdłuż promienia koła do jego środka, przy czym wielkość przyspieszenia jest stała.

Podczas ruchu punktu M po obwodzie koła, promień przeprowadzony do punktu ruchomego też się porusza, dla tego kąt pomiędzy promieniem ruchomym, a promieniem początkowym Oo /rys 16./ jest wielkością zmienną. Ten kąt będziemy oznaczać przez "Θ".

Niech w momentach czasu t i $t+\Delta t$ punkt ruchomy zajmuje na obwodzie koła położenia M i M_1 w czasie Δt łuk S otrzymuje przyrost Δs, a kąt Θ odpowiedni przyrost $\Delta\Theta$

Iloraz $\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}$ nazywamy średnią prędkością kątową okresu czasu Δt a granicę do której dąży ten iloraz, gdy okres czasu Δt dąży do zera nazywamy prędkością kątową w danej rozpatrywanej chwili czasu.



Rys.16.

Jeżeli będziemy oznaczać przez ω prędkość kątową w danej chwili czasu, to możemy według powyższego określenia napisać, iż:

$$\omega=\lim\frac{\Delta\Theta}{\Delta t}=\frac{d\Theta}{dt} \quad \text{..................../8/.}$$

Ale ponieważ zachodzi zależność

$$s=R.\Theta \text{ , to } \frac{ds}{dt}=R.\frac{d\Theta}{dt},$$

więc na zasadzie /8/ otrzymujemy, że

$$v=R.\omega \quad \text{.............................../9/}$$

innymi słowy mamy zależność pomiędzy prędkością kątową , prędkością liniową v . Równanie /9/ daje możność wyznaczenia prędkości liniowej według prędkości kątowej i odwrotnie.

Gdy ruch obrotowy jest jednostajny, wtedy obie prędkości v i ω mogą być z łatwością wyrażone przez czas trwania jednego obrotu, albowiem oznaczając ten okres przez T będziemy mieli:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$,skąd na podstawie wzoru /9/ :

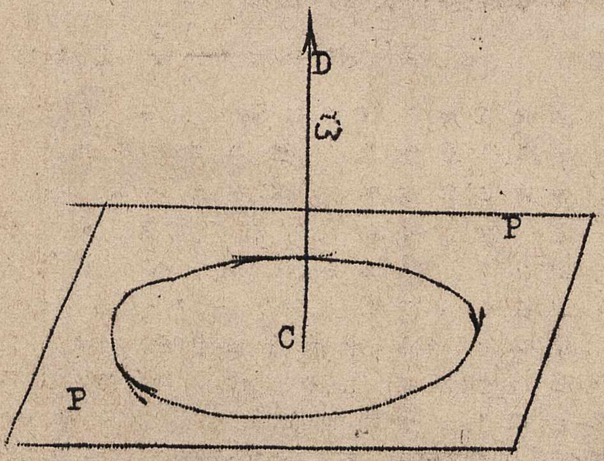
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Wymiar prędkości kątowej wyraża się symbolem:

$$\frac{1}{\text{jednostka czasu}} = \frac{1}{T} = T^{-1},$$

ponieważ kąt G ,jako liczba oderwana posiada wymiar zerowy.

A by przedstawić prędkość kątową w postaci wektora postępujemy w sposób następujący: przeprowadzamy do płaszczyzny PP ,w której odbywa się ruch obrotowy przez środek koła obrotu C /rys 17./ prostopadłą w tę stronę, aby patrzący stojąc w punkcie C na płaszczyźnie PP widział ruch punktu odbywający się od strony lewej ku prawej. Na tej prostopadłej odkładamy według obranej skali odcinek CD , zawierający tyle jednostek długości, ile jednostek prędkości kątowych zawiera dana prędkość kątowa .Otrzymany w ten sposób wektor przedstawi nam geometrycznie prędkość kątową.



Rys.17.

Jest rzeczą zrozumiałą, że dla ruchu obrotowego jednostajnego, wektor prędkości kątowej pozostaje stałym co do wielkości i kierunku, a dla ruchu obrotowego zmiennego, wektor pozostaje stałym tylko co do kierunku, wielkość zaś jego zmienia się wraz z biegiem czasu.

R o z d z i a ł V.

P r ę d k o ś ć i p r z y s p i e s z e n i e p u n k t u g d y r u c h j e s t d a n y z a p o m o c ą r ó w n a ń r u c h u s k o ń c z o n y c h.

W poprzednich rozdziałach rozpatrywaliśmy ruch punktu przypuszczając,że ruch ten jest określony za pomocą toru i prawa dróg.Jeszcze w rozdziale I był wzkazany inny sposób określenia ruchu punktu,mianowicie za pomocą równań skończonychruchu:

$$x = \varphi/t/ \; , \quad y = \psi/t/ \; , \quad z = \chi/t/ \ldots\ldots\ldots\ldots/1/$$

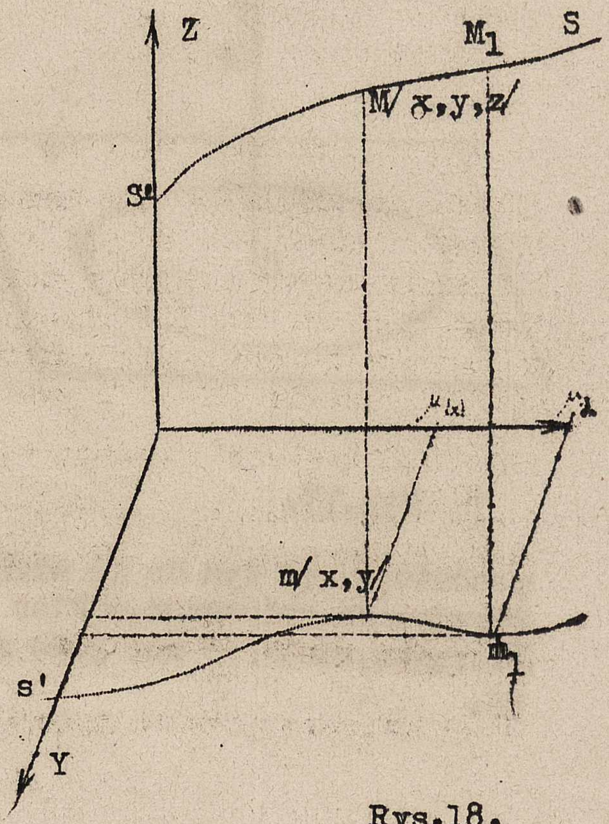
Podamy z początku mechaniczną interpretację każdego z pośród tych trzech równań z osobna,a także każdej pary tych równań.Niech OX, OY, OZ będą osiami współrzędnych względem których odbywa się ruch punktu po pewnym torze S'S /rys.18./ Wykreślmy rzuty każdego punktu toru S'S na płaszczyzny współrzędnych na rys.18. uczyniliśmy to względem płaszczyzny XOY i osi OX,OY .Rzuty tych punktów na każdej płaszczyźnie współrzędnych utworzą pewne linie krzywe,leżące na tych płaszczyznach np.na płaszczyźnie XOY otrzymamy krzywą linię s's .

Podczas kiedy punkt,M porusza się torze SS' jego rzut m porusza się wzdłuż krzywej s's.Biorąc pod uwagę,że współrzędne x,y,punktu M i jego rzutu m na płaszczyznę XOY są identyczne, przychodzimy do wniosku,że równania

$x = \varphi/ t /, \quad y = \chi/ t /$

określają ruch rzutu danego p punktu M na płaszczyznę OXY t.j. ruch punktu m wzdłuż toru s's.

Podobnie,na zasadzie tego,że współrzędne x danego punktu M i jego rzutu μ na oś OX są identyczne, wnioskujemy,iż równanie $x = \varphi/t/$ określa ruch rzutu μ danego punktu M wzdłuż osi OX,innymi słowy równanie $x = \varphi/t/$ jest prawem dróg dla ruchu



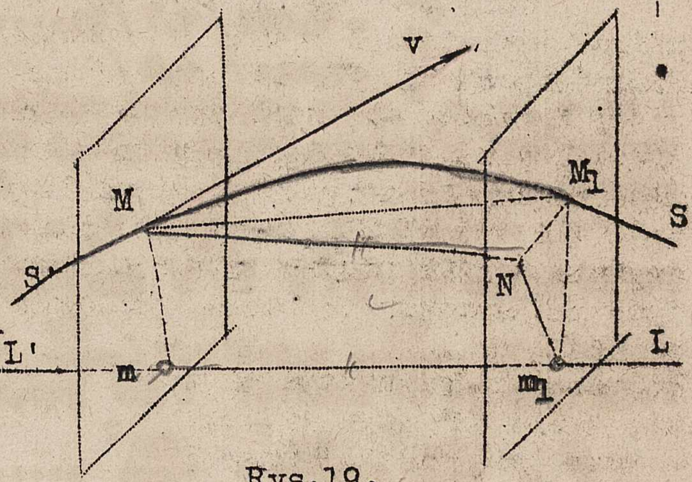
Rys.18.

prostoliniowego wzdłuż prostej OX rzutu μ na prostą OX danego punktu M.

Analogiczne rozwiązania wykazują, że układ dwóch równań: $x = \varphi/t/$ i $z = \chi/t/$ określa ruch rzutu punktu M na płaszczyznę XOZ na tej płaszczyźnie i t.d.

Rzutując dany punkt ruchomy na dowolną oś L'L podobnie jak wyżej rzutowaliśmy go na osie współrzędnych, zobaczymy, iż ruch danego punktu wzdłuż jego toru pociąga za sobą ruch jego rzutu na oś L'L wzdłuż tej osi L'L. W każdym momencie czasu t możemy określić prędkość v danego punktu M na torze S'S i prędkość v jego rzutu na oś L'L na tej osi.

Twierdzenie: Gdy rzutujemy dany punkt ruchomy M na dowolną oś L'L /rys.19/, to w każdym momencie czasu prędkość rzutu punktu M jest równa rzutowi prędkości danego punktu M na tę samą oś L'L, t.j.



Rys.19.

$$v_{L'L} = v \cdot \cos/v, L'L/$$

Rzeczywiście, niech tor danego punktu M będzie S'S, a oś rzutów jest L'L. Jeżeli w momentach czasu t i $t + \Delta t$ punkt ruchomy zajmuje położenie M i M_1, to rzuty jego m i m_1 na osi L'L otrzymamy za pomocą płaszczyzn, przechodzących przez punkty M i M_1 prostopadle do osi L'L, prosta MN // L'L jest linią pomocniczą.

Średnia prędkość danego punktu za okres czasu Δt jest $\frac{\smile MM_1}{\Delta t}$, a średnia prędkość za ten sam okres czasu rzutu danego punktu jest $\frac{mm_1}{\Delta t}$ mamy więc, że

$$v = \lim \frac{\smile MM_1}{\Delta t} = \lim \frac{MM_1}{\Delta t}, \text{ oraz } v_{L'L} = \lim \frac{mm_1}{\Delta t} \quad .... /2/$$

Ale mm_1 jest rzutem cięciwy MM_1 na oś L'L, dlatego

$$mm_1 = MM_1 \cos / MM_1, L'L /,$$

skąd znajdziemy $\frac{mm_1}{\Delta t} = \frac{MM_1}{\Delta t} \cos / MM_1, L'L /$, więc:

$$\lim \frac{mm_1}{\Delta t} = \lim \frac{MM_1}{\Delta t} \cdot \lim \cos / MM_1, L'L /$$

Na zasadzie wzoru /2/ i twierdzenia, że $\measuredangle / MM_1, L'L /$ w granicy dąży do kąta / v, L'L /, otrzymujemy, iż

$$v_{L'L} = v.\cos / v, L'L / \text{..................} /3/$$

c.b.d.o.

Stosując powyższe twierdzenie do osi w spółrzędnych otrzymujemy, że

$$v_x = v.\cos / v, X /;$$
$$v_y = v.\cos / v, Y /; \text{..................} /4/$$
$$v_z = v.\cos / v, Z /$$

Ale v_x, v_y, v_z, jako prędkości ruchów prostoliniowych wzdłuż osi współrzędnych OX, OY, i OZ, są określone za pomocą wzorów:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \text{.........} /5/$$

Porównując wzory /4/ i /5/ znajdujemy, iż:

$$v.\cos / v, X / = \frac{dx}{dt}, \quad v.\cos / v, Y / = \frac{dy}{dt}, \quad v.\cos / v, Z / = \frac{dz}{dt} \text{.....} /6/.$$

Podnosząc je do kwadratu i dodając, otrzymamy:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \text{..................} /7/,$$

ponieważ wiemy z geometrii analitycznej, że

$$\cos^2 / v, X / + \cos^2 / v, Y / + \cos^2 / v, Z / = 1.$$

Z równań /7/ znajdujemy, iż:

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \text{..................} /8/$$

$$\cos / v, X / = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}; \quad \cos / v, Y / = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

$$\cos / v, Z / = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

przy czym x', y', z' oznaczają pochodne $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Równania /8/ pozwalają określić wielkość i kierunek prędkości punktu ruchomego, jeżeli tylko znamy równania ruchu skończone /1/. Zauważymy, że we wzorach /8/ v jest wzięte ze znakiem "+", ponieważ, gdy ruch punktu jest dany za pomocą równań ruchu skończonych /1/, to dodatni kierunek na

punktu nie jest nam znany, więc może być w każdym momencie czasu obrany dowolnie, co też robimy, stawiając przed pierwiastkiem kwadratowym we wzorach /8/ znak "+".

Gdy ruch danego punktu jest płaski, wtedy wystarczy mieć dwie osi współrzędnych, leżące w płaszczyźnie ruchu. W tym wypadku równania /8/ przybiorą postać:

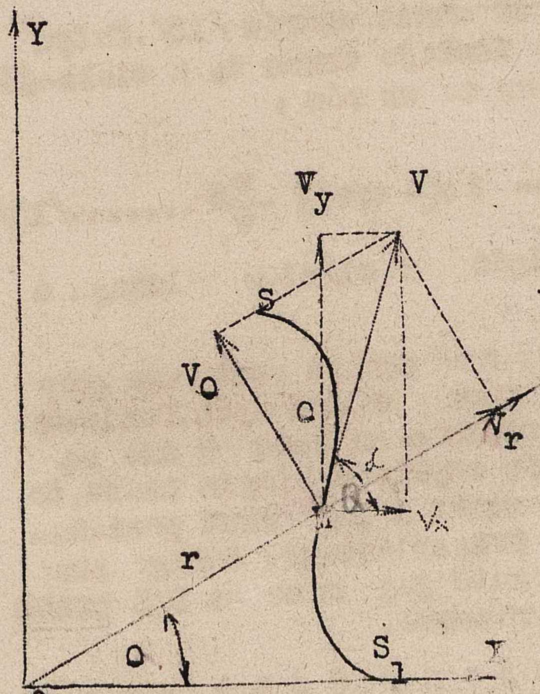
$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \cos/v,X/ = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \cos/v,Y/ = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \ldots\ldots /9/$$

ponieważ $z = z' = 0$

Wyprowadzimy wzory, określające wielkość i kierunek prędkości płaskiego ruchu punktu, gdy współrzędne są biegunowe: M /r, θ/. Ruch punktu ruchomego po torze jest w tym wypadku określony, gdy posiadamy obydwie współrzędne t.j. promień wodzący w funkcjach czasu t, mianowicie:

$$r = r/t/ \quad i \quad \theta = \theta/t/ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /10/.$$

Równania te są jednocześnie parametrycznymi równaniami toru S'S punktu ruchomego M. Pierwsze z pośród tych równań ruchu określa ruch na promieniu wodzącym, a drugie obracanie się tego promienia r dookoła bieguna układu O /rys. 20/.



Rys 20.

Aby wyznaczyć prędkość v punktu M, znajdziemy jej rzuty na kierunek promienia wodzącego, wziętego w stronę skierowaną od bieguna O, i na prostą prostopadłą do promienia r w stronę, w którą kąt biegunowy wzrasta. Weźmiemy prostopadłe osie Kartezjusza tak, aby początek ich był zgodny z biegunem, a oś OX była zgodna z osią biegunową. Oznaczając wtedy odpowiednio przez v_r i v_θ rzuty prędkości v na promień wodzący i na prostopadłą do niego, przez v_x i v_y, jak zwykle, rzuty tejże prędkości v

na osie Kartezjusza, na zasadzie twierdzenia o rzucie wypadkowej, będziemy mieć równości:

$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta$ i $v_\theta = -v_x \sin\theta + v_y \cos\theta$.

Lecz wiemy, że $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, więc po podstawieniu w poprzednie wzory, otrzymamy, iż:

$$v_r = \frac{dx.\cos\theta + dy.\sin\theta}{dt} \text{ i } v_\theta = \frac{-dx.\sin\theta + dy\cos\theta}{dt} \quad \ldots /11/$$

Ponieważ pomiędzy współrzędnymi Kartezjusza X, Y, a współrzędnymi biegunowymi r, θ zachodzą zależności

$$x = r.\cos\theta, \quad y = r.\sin\theta$$

więc różniczkując je, otrzymujemy:

$$dx = dr.\cos\theta - r.\sin\theta d\theta, \quad dy = dr.\sin\theta + r.\cos\theta d\theta$$

Po podstawieniu tych wyrażeń na dx i dy we wzory /11/, znajdujemy, że

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r.\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots /12/$$

przyczem pochodne $\frac{dr}{dt}$ i $\frac{d\theta}{dt}$ wyznaczymy w postaci funkcji czasu za pomocą różniczkowania wzorów /10/. Zatym określimy v_r i v_θ jako pewne funkcje czasu t, a wielkość i kierunek prędkości v znajdziemy ze wzorów:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \text{ i } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{v_\theta}{v_r} \quad \ldots /13/$$

przy czym α oznacza tu kąt pomiędzy promieniem wodzącym a kierunkiem prędkości v.

Rozpatrzmy teraz przyspieszenie punktu ruchomego, gdy ruch jest dany za pomocą równań ruchu skończonych. Ponieważ prędkość danego punktu M i jego rzutu m na daną oś nie są zwykle stałymi, lecz zmieniają się zwykle z biegiem czasu, to w każdym momencie czasu t dany punkt i jego rzut posiadają pewne przyspieszenie. Oznaczmy przyspieszenie danego punktu M przez w, a przyspieszenie rzutu jego m na oś L'L przez w, Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. G d y r z u t u j e m y d a n y p u n k t r u c h o m y M n a d o w o l n ą o ś L'L /rys. 21/, t o w k a ż d y m m o m e n c i e c z a s u p r z y s p i e s z e n i e r z u t u p u n k t u M j e s t r ó w n e r z u t o w i ~~p u n k t u~~ p r z y s p i e s z e n i a d a n e g o p u n k t u M n a t ę s a m ą o ś L'L, t.j. $w_{LL} = w.\cos /w, L'L/$.

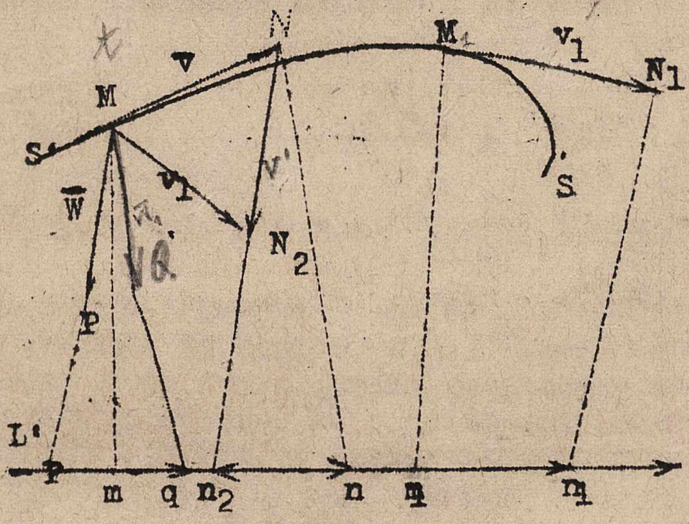
Na rysunku 21 krzywa S'S jest torem punktu ruchomego, M i MN = v jest to położenie i wektor prędkości w momencie czasu t; M_1 i $M_1N_1 = v_1$ oznaczają te same wielkości w momencie czasu $t + \Delta t$; $NN_2 = v'$ jest geometryczną różnicą wektorów v_1 i v, MP jest to wektor średniego przyspieszenia w okresie czasu Δt przy czym :

$$W = MP = \frac{NN_2}{\Delta t} \qquad /14/$$

MQ = jest wektorem przyspieszenia punktu ruchomego w momencie czasu t, t.j.

$$w = \lim W = \lim MP \qquad /15/$$

Jednobrzmiącymi małymi literami oznaczyliśmy rzuty wymienionych punktów i wektorów na oś L'L. Wiemy, iż prędkość rzutu danego punktu w momencie czasu t i /t + Δ t/ przedstawia się za pomocą wektorów mn i m_1n_1; wektor m_1n_1 na podstawie równości i równoległości M_1N_1 i MN_2, jest równy wektorowi mn_2, a dlatego geometryczną różnicą prędkości rzutów danego punktu jest wektor nn_2. Stąd wynika, że średnie przyspieszenie rzutu punktu w okresie czasu Δ t jest



Rys.21.

$$W = \frac{nn_2}{\Delta t}$$

mamy więc

$$w_{L'L} = \lim \frac{nn_2}{\Delta t}. \qquad /16/$$

Ale na podstawie równoległości NN_2 i MP stwierdzamy, że

$\frac{MP}{NN_2} = \frac{mp}{nn_2}$, oprócz tego /14/ oznacza, iż

$\frac{MP}{NN_2} = \frac{1}{\Delta t}$ więc

$\frac{mp}{nn_2} = \frac{1}{\Delta t}$, czyli

$$\frac{nn_2}{\Delta t} = mp \qquad /17/.$$

Wreszcie wiemy, że mp = MP.cos / MP, L'L /

więc ostatecznie: $\frac{nn_2}{\Delta t}$ = MP .cos /MP,L'L /, a przechodząc do granicy otrzymujemy równość:

$$\lim \frac{nn_2}{\Delta t} = \lim MP . \lim . \cos /MP, L'L /.$$

Zauważymy, że pierwszy czynnik drugiej części jest w_1 drugi czynnik, jako granicę ma cos /w, L'L /, albowiem MP w

granicy staje się w. Zatym ostatnią równość możemy napisać tak :

$$W_{L'L} = w\cos / w, L'L / . \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Zastosujemy powyższe twierdzenia do osi współrzędnych OX, OY, i OZ, wtedy będziemy mieli wzory następujące:

$$\begin{aligned} w_x &= w \cdot \cos / w, X / \\ w_y &= w \cdot \cos / w, Y / \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / 18 / \\ w_z &= w \cdot \cos / w, Z / \end{aligned}$$

Ponieważ zaś ruchy rzutów danego punktu na osiach współrzędnych OX, OY, OZ są ruchami prostoliniowymi więc :

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{i} \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots / 19 /$$

Układ równań /18 / i /19 / dają nam zależności.

$$\begin{aligned} w \cdot \cos / w, X / &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ w \cdot \cos / w, Y / &= \frac{d^2y}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / 20 / \\ w \cdot \cos / w, Z / &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

Podnosząc je do kwadratu i dodając wzajemnie stronami otrzymamy:

$$w^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots / .21 /$$

ponieważ zachodzi zależność, iż $\cos^2 / w.X / + \cos^2 / w,Y / + \cos^2 / w,Z / = 1$

Wzór /21 / daje możność obliczyć przyspieszenie, gdy mamy skończone równania ruchu /1 /, następnie ze wzorów / 20 / obliczymy cosinusy kątów pomiędzy przyspieszeniem, a osiami współrzędnych, mianowicie, oznaczając dla skrótu drugie pochodne współrzędnych według czasu przez x", y", z", będziemy mieli :

$$w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$\begin{aligned} \cos / w, X / &= \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \\ \cos / w, Y / &= \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \quad \ldots\ldots / 22 / \\ \cos / w, Z / &= \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \end{aligned}$$

Wzory "22" określają w zupełności wielkość i kierunek przyspieszenia punktu ruchomego.

Gdy ruch punktu jest p ł a s k i ,wtedy biorąc płaszczyźnie ruchu dwie osie współrzędnych OX i OY ,i zauważywszy,że wtedy $z = z'' = 0$ z równań /22/ znajdziemy,iż:

$$w = \sqrt{x''^2 + y''^2}\ , \cos /w,X/ = \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}$$

$$\cos /w,Y/ = \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}} \quad ..../23/$$

P r z y k ł a d I . Znajdziemy przyspieszenie punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po kole,równania ruchu skończonego są:

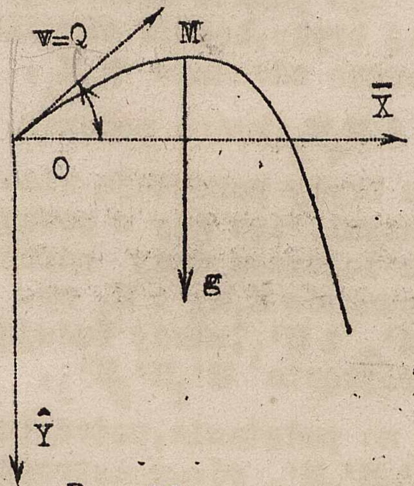
$$x = a.\cos kt,\ y = a.\sin kt$$

różniczkując znajdziemy:

$$x'' = -ak^2.\cos kt,\quad y'' = -ak^2.\sin kt,$$

więc przypspieszenie posiada wielkość stałą : $w = ak^2\sqrt{1}$ jest skierowane wzdłuż promienia koła do jego środka.

P r z y k ł a d II. Przyspieszenie punktu jest stałe co do wielkości i kierunku- równa się $g = 981$ cm / sek^2 i jest skierowane pionowo na dół.W momencie czasu $t = 0$ punkt ruchomy znajduje się w początku współrzędnych i posiada prędkość równa "a" tworzącą z kierunkiem poziomym kąt α.Znaleźć prędkość i ruch punktu ruchomego.



Rys.22.

Obierzmy oś OX poziomo ,a oś OY skierujemy pionowo na dół /rys 22./ W tedy mamy :

$$x'' = 0\ ,\ y'' = g \quad \text{Gdy } t = 0,$$

wtedy $x_o = y_o = 0$

$$x'_o = a.\cos \alpha\ ,\ y'_o = a.\sin \alpha .$$

W ięc znajdujemy,że:

$$x' = \text{constans};\ y' = gt + \text{const}.$$

skad $x' = a.\cos \alpha\ , y' = gt + a\sin \alpha$.

Całkując otrzymujemy:

$$x = at.\cos \alpha + \text{const},$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + at.\sin \alpha + \text{const}.$$

Ponieważ te stałe muszą być równe zeru,więc ostatecznie

$$x = at.\cos \alpha\ ,\ y = \frac{1}{2} gt^2 + at.\sin \alpha$$

i tor punktu jest parabolą.

R o z d z i a ł VI.
P o d s t a w o w e p o j ę c i e k i n e m a t y k i b r y ł y m a t e r i a l n e j .

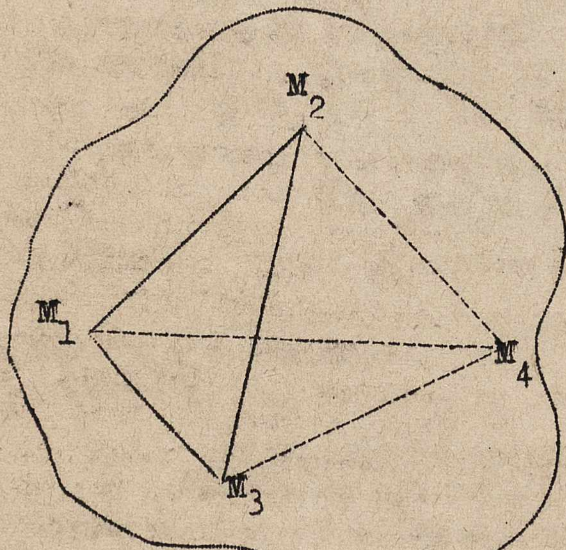
W e wstępie do mechaniki teoretycznej podaliśmy określenie bryły materialnej. B r y ł ą m a t e r i a l n ą nazwaliśmy taki układ p u n k t ó w m a t e r i a l n y c h pomiędzy którymi o d l e g ł o ś c i n i e u l e g a j ą z m i a n i e z biegiem czasu.

Gdy bryła materialna porusza się poruszają się jej poszczególne punkty. Łatwo wykazać, że dla określenia ruchu bryły materialnej nie ma potrzeby znać ruchów każdego punktu tej bryły.

Liczbę i rozmieszczenie punktów, określających ruch bryły materialnej, podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie. R u c h b r y ł y m a t e r i a l n e j j e s t w z u p e ł n o ś c i o k r e ś l o n y r u c h e m t r z e c h jej p u n k t ó w n i e l e ż ą c y c h n a j e d n e j p r o s t e j.

Rzeczywiście, obierzemy w bryle materialnej trzy jakiekolwiek punkty M_1, M_2 i M_3 /rys.23./, byle tylko nie leżały na jednej i tej samej prostej. Wtedy położenie dowolnego punktu czwartego M_4 tej bryły, będzie określone za pomocą odcinków M_4M_1, M_4M_2 i M_4M_3, które podczas ruchu bryły pozostają niezmiennymi. Więc gdy w pewnym momencie czasu mamy położenia punktów M_1M_2 i M_3 np. M'_1, M'_2 i M'_3, wtedy budując na trójkącie $M'_1M'_2M'_3$, jako na podstawie, ostrosłup $M'_4M'_1M'_2M'_3$ równy ostrosłupowi $M_4M_1M_2M_3$, znajdziemy odpowiednie położenie M'_4 punktu czwartego M_4 c.b.d.o.



Rys.23.

W następujących §§ rozpatrzymy ruchy bryły materialnej: *postępowy, obrotowy dookoła osi, płaski, obrotowy dookoła punktu* i udowodnimy, że każdy ruch bryły materialnej może być sprowadzony /dla nieskończenie małego okresu czasu w każdym wypadku/ do ruchu postępowego i obrotowego dookoła osi.

I. *Ruch punktu bryły materialnej poruszającej się ruchem postępowym.*

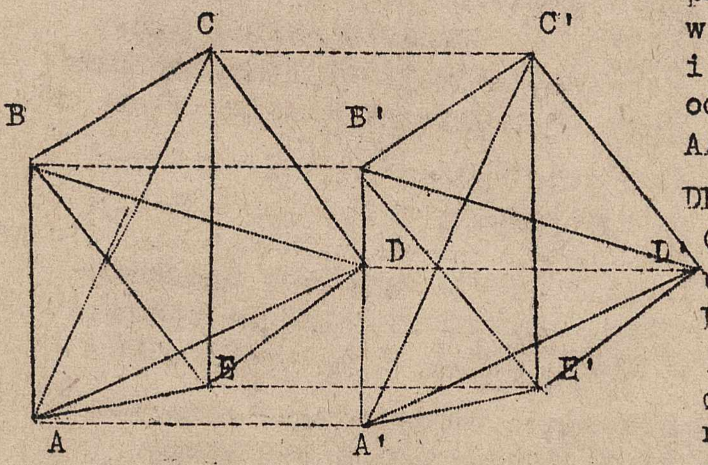
Widzimy ze wstępu do mechaniki, że *ruchem postępowym bryły materialnej jest taki ruch, podczas którego proste łączące punkty bryły materialnej pozostają do siebie równoległymi.*

Przedewszystkim udowodnimi, że taki ruch jest możliwy. Weźmiemy w bryle materialnej szereg punktów A,B,C,D,E, /rys.24./ i przeprowadzimy z tych punktów w dowolnym kierunku równe i wzajemnie równoległe odcinki:

$AA' \# BB' \# CC' \#$

$DD' \# EE'$ ..../1/

Otrzymamy wtedy nowy układ punktów A',B',C', D',E',....., zupełnie identyczny z danym układem i różniący się od niego tylko położeniem zajmowanym w przestrzeni. W samej rzeczy, z /1/ wynika, że odległości pomiędzy punktami obu układów są jednakowe, i że kąty utworzone prostymi, łączącymi te punkty, są też jednakowe w obu układach.



Rys.24.

Jeżeli zaś oba układy są jednakowe i proste, łączące odpowiednie punkty tych układów, są wzajemnie równoległe, jak to wynika z /1/, to istnienie ruchu postępowego jest udowodnione.

Z powyższego rozumowania wynika, że

podczas prostoliniowego, postępowego ruchu bryły materialnej drogi zakreślone przez poszczególne punkty bryły są wzajemnie równe i równoległe. Dlatego w wypadku prostoliniowego i postępowego ruchu muszą być równe i równoległe, jak prędkości tak i przyspieszenia poszczególnych punktów bryły materialnej.

Postępowy ruch bryły niekoniecznie musi być prostoliniowym, lecz możey być i krzywoliniowym. Rzeczywiście, jeżeli:

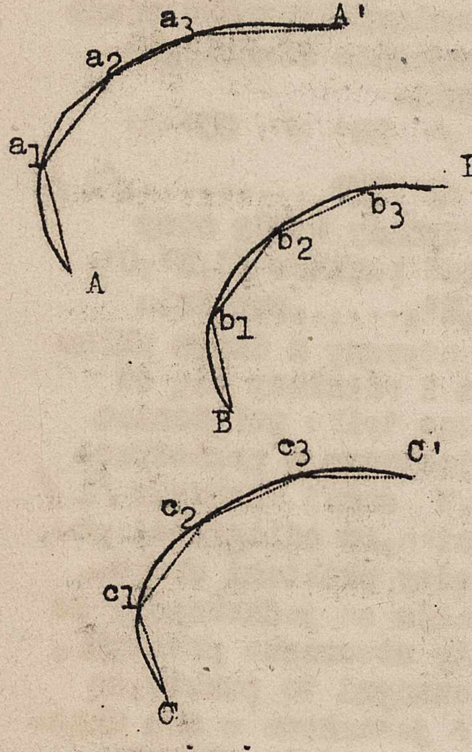
przyjmiemy układ punktów A ,B,C,D,..................
należący do bryły materialnej /rys.25./,

przeprowadzimy n.p. przez punkt A dowolną krzywą AA'
i wpiszemy do niej jakąbądź linię łamaną $Aa_1\ a_2\ a_3\ A'$.
następnie przeprowadzimy przez pubkty BCD ....
linie łamane $Bb_1, B_2\ b_3\ B'$, $Cc_1\ c_2\ c_3\ C'$, $Dd_1 d_2 d_3 D'$.......
równe i równoległe do pierwszej, wtedy możemy za pomocą ruchów prostoliniowych i postępowych przeprowadzić układ A,B, C.D,......stopniowo w położenia:

a_1, b_1, c_1, d_1,...................
a_2, b_2, c_2, d_2,...................
A ',B',C',D',..................

Jeżeli Będziemy nieskończenie powiększać liczbę boków łamanej linii $A_1 a_1 a_2 a_3 A'$,jednocześnie zmniejszając same boki to jako granicę otrzymamy krzywą AA' i na podstawie równości linii łamanych, równe jej krzywe BB',CC',DD',

Zatym ruch krzywoliniowy postępowy możemy uważać jako granicę prostoliniowych ruchów postępowych, a dla tego własności ruchu prostoliniowego postępowego, dotyczące torów prędkości i przyspieszenia poszczególnych pinktów, pozostają prawomocnymi i dla ruchu krzywoliniowego postępowego.



Rys.25.

W każdym więc ruchu postępowym bryły materialnej tory, zakreślone poszczególnymi punktami bryły w ciągu tego samego czasu, są jednakowe. Prędkości wszystkich punktów są równe i wzajemnie równoległe, przyspieszenia też są równe i równoległe.

Z powyższego wynika, że aby określić ruch postępowy bryły materialnej wystarcza określić ruch jakiegokolwiek punktu tej bryły.

Widzimy stąd, że kinematyka ruchu postępowego bryły materialnej sprowadza się do kinematyki punktu materialnego. Więc wszystkie wyniki i wzory, otrzymane w poprzednich rozdziałach, zastosowane do jednego jakiegobądź punktu bryły, poruszającej się postępowo, możemy rozciągnąć na wszystkie pozostałe punkty tej bryły.

Przed chwilą podaliśmy dowód geometryczny tego, że ruch bryły materialnej jest określony w zupełności ruchem jednego jej punktu. Udowodnimy teraz to samo drogą analityczną.

Przypuśćmy, że $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ są to poszczególne punkty bryły materialnej, a $/x_0, y_0, z_0/, /x_1, y_1, z_1/ \ldots\ldots$ $\ldots /x_n, y_n, z_n/$ ich współrzędne względem pewnych nieruchomych w przestrzeni osi współrzędnych. Wymienione współrzędne $x_0, \ldots\ldots x_n$, są funkcjami czasu t.

Weźmiemy drugi układ osi współrzędnych $A_0 /\xi, \eta, \zeta/$ równoległy do pierwszego mający swój początek w jednym z punktów bryły materialnej, w punkcie A_0 i połączonych sztywnie z bryłą materialną. Oznaczymy współrzędne punktu $A_1, A_2, \ldots$ A_n względem tych osi przez $/\xi_1 \eta_1, \zeta_1/$ $/\xi_2 \eta_2 \zeta_2/ \ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots /\xi_n \eta_n \zeta_n/$.

Ponieważ odległości pomiędzy tymi punktami są niezmienne więc wymienione współrzędne $\xi_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \zeta_n$ są wielkościami stałymi, niezależnymi od czasu t. Gdy bryła materialna będzie poruszać się postępowo, wtedy układ osi współrzędnych $A_0 /\xi, \eta, \zeta/$, poruszając się wraz z bryłą postępowo, będzie stale równoległym do osi nieruchomych OXYZ.

Wzory przekształcenia współrzędnych dadzą nam zależności:

$$x_i = x_o + \xi_i$$
$$y_i = y_o + \eta_i \qquad i \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots n.$$
$$z_i = z_o + \zeta_i$$

Różniczkując je dwa razy z rzędu znajdziemy:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_o}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_o}{dt}, \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{dz_o}{dt} \quad i$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2x_o}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2y_o}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d^2z_o}{dt^2}$$

Ponieważ wiemy, że:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \cos/v_i X/, \quad \frac{dx_o}{dt} = v_o \cos/v_o, X/,$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = v_i \cos/w_i X/, \quad \frac{d^2x_o}{dt^2} = w_o \cos/w_o, X/,$$

więc otrzymujemy:

$$v_i\cos/v_i, X/ = v_o\cos/v_o, X/,$$
$$v_i\cos/v_i, Y/ = v_o\cos/v_o, Y/,$$
$$v_i\cos/v_i, Z/ = v_o\cos/v_o, Z/,$$

oraz:

$$w_i\cos/w_i, X/ = w_o\cos/w_o, X/,$$
$$w_i\cos/w_i, Y/ = w_o\cos/w_o, Y/,$$
$$w_i\cos/w_i, Z/ = w_o\cos/w_o, Z/.$$

Z tych wzorów wynika, że:

$$v_i = v_o, \quad w_i = w_o, \quad /i = 1,2,3,\ldots,n/ \quad \text{c.b.d.o.}$$

Widzimy stąd, że gdy mamy równania ruchu skończone jakiegokolwiek punktu $A/_o$ $/x_o, y_o, z_o/$ bryły materialnej poruszającej się postępowo:

$$x_o = f_1/t/, \quad y_o = f_2/t/, \quad z_o = f_3/t/,$$

możemy znaleźć tor, prędkości i przyspieszenia każdego punktu bryły.

2. R u c h   p u n k t ó w   b r y ł y   m a t e r i a l n e j   o b r a c a j ą c e j   s i ę   d o o k o ł a   o s i   s t a ł e j .

Określenie ruchu obrotowego bryły materialnej było podane we wstępie do mechaniki.

R u c h e m   o b r o t o w y m   b r y ł y   d o o k o ł a   s t a ł e j   o s i   n a z w a l i ś m y   t a k i   r u c h   b r y ł y , p o d c z a s   k t ó r e g o   d w a   p u n k t y   t e j   b r y ł y   p o z o s t a j ą   n i e r u c h o m y m i .

Ponieważ ruch bryły jest określony wwypadku ogólnym ruchem trzech jej punktów, nieleżących na jednej prostej,a w rozpatrywanym ruchu,jak to wynika z jego określenia,dwa punkty M_1 i M_2 /rys.26,/ s ą   n i e r u c h o m e , w i ę c   a b y   w   z u p e ł n o ś c i   o k r e ś l i ć   r u c h   o b r o t o w y , m u s i m y   p o d a ć   r u c h   t y l k o   j e d n e g o   p u n k t u , n i e l e ż ą c e g o   n a   o s i   o b r o t u M_1M_2 np. ruch punktu M_3 .

Jest ezeczą oczy wistą,że wszystkie punkty położone na osi są nieruchomymi.Rzeczywiście,gdyby np. punkt M_4 znajdujacy się na osi obrotu był ruchomym,wtedy odległość M_4M_1 i M_4M_2 musiałyby być zmiennymi z biegiem czasu,co jest rzeczą niemożliwą ,ponieważ bryła materialna jest niezmiennym ukła-dem punktów materialnych.

Następnie jest jasnym,że każdy punkt,nieleżący na osi obrotu,zakreśla obwód koła,którego promień jest równy najkrótszej odległości punktu rozpatrywanego od osi obrotu,a środek tego koła leży na osi obrotu.Wreszcie promienie kół,zakreślanych przez poszczególne punkty bryły,obracają się w ciągu jednego i tego samego okresu czasu o jednakowe kąty.Wynika to bezpoś-rednio z niezmienności bryły materialnej .

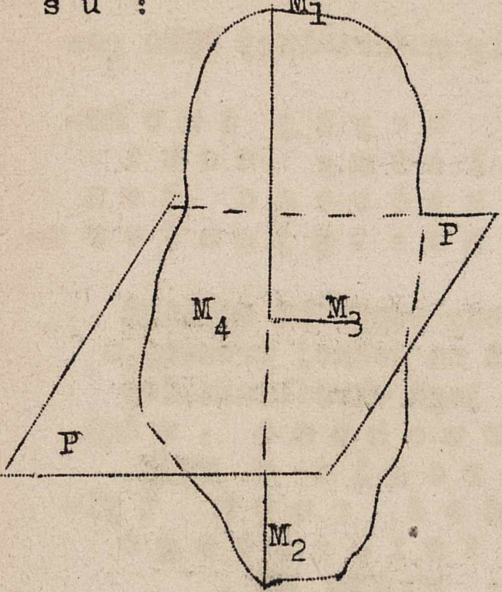
Z powyższych uwag widzimy,że dla określenia obrotowego ruchu bryły dookoła osi stałej wystarcza mieć w postaci funkcji czasu kąt obrotu jednego punktu bryły materialnej,innymi słowy poznać zależność pomiędzy kątem bryłowym Θ obrotu bryły i czasem t .

Przypuśćmy,że mamy zależność $\Theta = \Theta/t/$ ..../1/ wtedy na zasadzie wzoru /8 / rozdz.IV,znajdziemy prędkość kątową obrotu bryły,mianowicie:

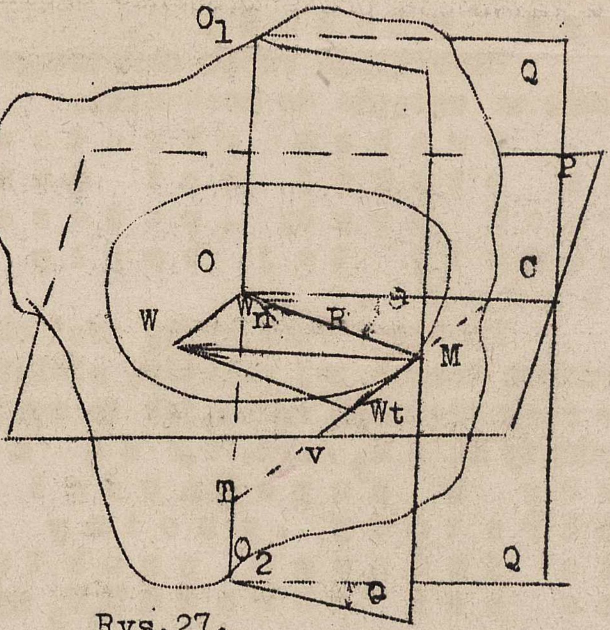
$$\omega = \frac{d\Theta/t/}{dt} = \Theta'/t/ \qquad (2)$$

Pokażemy,że wiedząc położenie w bryle osi obrotu i mając prędkość kątową obrotu, m o ż e m y   w y z n a-

czyć wielkość i kierunek prędkości i przyspieszenia każdego punktu bryły w każdym momencie czasu :



Rys.26.



Rys.27.

Wielkość prędkości liniowej v dla jakiegokolwiek punktu M bryły, obliczymy za pomocą wzoru /9/ rozdz.IV. $v = R.\,\omega$, przy czym R oznacza najkrótszą odległość danego punktu M od osi obrotu.

Kierunek prędkości v określi nam styczna TT przeprowadzona w punkcie M do koła, zakreślonego przez ten punkt w kierunku obrotu bryły. Aby zbudować tę styczną TT przeprowadzamy przez dany punkt M płaszczyznę PP prostopadłą do osi O_1O_2, w przecięciu z osią O_1O_2 otrzymamy punkt O. Połączmy go z punktem M prostą OM /rys.27/. Prosta TT przeprowadzona w płaszczyźnie PP przez punkt M prostopadle do OM, będzie szukaną styczną.

Wielkość i kierunek przyspieszenia w punktu M określimy następująco: przyspieszenie normalne w_n wyznaczymy za pomocą wzoru /13/ rozdz.III i wzoru /2/ mianowicie:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\,\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /3/$$

przyspieszenie styczne w_t za pomocą wzoru /11/ rozdz.III i wzoru /2/

$$w_t = \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R.\,\omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

Takliński-Mechanika teoretyczna.

przy czym ω' oznacza tu pochodną ω względem czasu t.

Znając przyspieszenie normalne i styczne obliczymy z łatwością przyspieszenie ogólne w :

$$w^2 = w_t^2 + w_n^2 = R^2/\omega'^2 + \omega^4/,$$

czyli

$$w = R\sqrt{\omega'^2 + \omega^4}$$

w jest skierowane wzdłuż przekątnej prostokąta zbudowanego na w_t i w_n jako na bokach.

Wprowadzoną przez nas wielkość $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$ nazywamy p r z y s p i e s z e n i e m k ą t o w y m o b r o t u. Ponieważ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, przyczym θ oznacza zmienny kąt pomiędzy promieniem punktu Om, a kierunkiem stałym CO , więc:

$$\omega' = \frac{d^2\theta}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /6/$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest $\frac{1}{/\text{jedn.czasu}/^2} = T^{-2}$ np.gdy jako jednostkę czasu obrano sekundę, wtedy jednostka przyspieszenia kątowego = $\frac{1}{\text{sek}^2}$

Gdy więc mamy zależność /1/, będącą równaniem r u c h u o b r o t o w e g o wtedy prędkość i przyspieszenia każdego punktu bryły obliczamy za pomocą wzoru /2/ - /6/.

Jeżeli $\theta = \alpha + \beta t$ /α i β/ są stałe wtedy $\omega = \beta$, $\omega' = 0$ i ruch obrotowy jest j e d n o s t a j n y.

Jeżeli zaś $\theta = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ wtedy $\omega' = 2\gamma$ i ruch obrotowy jest j e d n o s t a j n i e z m i e n n y.

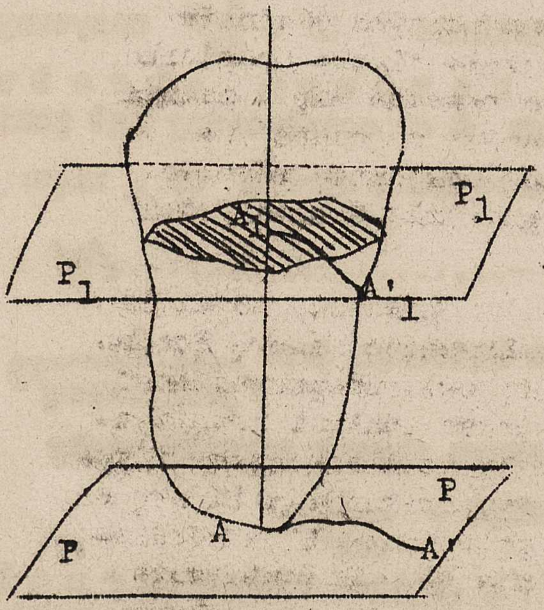
3. P ł a s k i r u c h b r y ł y m a t e r i a l n e j.

R u c h b r y ł y m a t e r i a l n e j n a z y w a m y p ł a s k i m, g d y p u n k t y t e j b r y ł y z n a j d u j ą c e s i ę w p e w n y m m o m e n c i e c z a s u w j e d n e j i t e j s a m e j p ł a s z c z y z n i e n i e r u c h o m e j, p o z o s t a j ą w tej płaszczyźnie podczas ruchu bryły.

Płaski ruch jest to zatym ruch równoległy do pewnej płaszczyzny nieruchomej; podczas ruchu płaskiego, odległość

każdego punktu bryły od płaszczyzny nieruchomej,równolegle do której ruch się odbywa,pozostaje stałą.Oczywistym jest,że podczas ruchu płaskiego punkty bryły materialnej, położone w jakiej bądź płaszczyznie,równoległej do płaszczyzny nieruchomej,pozostaja stale w tej płaszczyznie, gdy bryła się porusza.

Ruch wszystkich punktów bryły materialnej,znajdujących się na jednej i tej samej prostej,prostopadłej do płaszczyzny nieruchomej, jest zatym zupełnie identyczny.Dlatego też ruch płaski będzie w zupełności określony,gdy poznamy ruch tej p ł a s k i e j f i g u r y n i e z m i e n n e j ,którą otrzymujemy w przecięciu bryły materialnej z płaszczyzną nieruchomą,Wtedy /rys.28/ tory punktów A i A_1,leżących na jednej prostopadłej AA_1 do nieruchomej płaszczyzny PP,będą jednakowe / $A_1A'_1$ i AA'/,a stąd wynika,że będą i jednakowe prędkości i przyspieszenia tych punktów.



Rys.28.

Wykażemy,że płaski ruch bryły może być sprowadzony do ruchu obrotowego dookoła pewnej osi; udowodnimy w tym celu następujące twierdzenie B e r n u l l i C h a s l e s' a :

Twierdzenie. K a ż d e p o ł o ż e n i e n i e z m i e n n e j f i g u r y ,p o r u s z a j ą c e j s i ę w s w e j p ł a s z c z y z n i e ,m o ż e m y otrzymać z j a k i e g o k o l w i e k d r u g i e g o j e j p o ł o ż e n i a z a p o m o c ą o b r o t u d o o k o ł a p e w n e j o s i p r o s t o p a d ł e j d o p ł a s z c z y z n y f i g u r y ,j e ż e l i t y l k o to n o w e p o ł o ż e n i e n i e o t r z y m u j e s i ę z a p o m o c ą p r z e s u n i ę c i a p o s t ę p o w e g o.

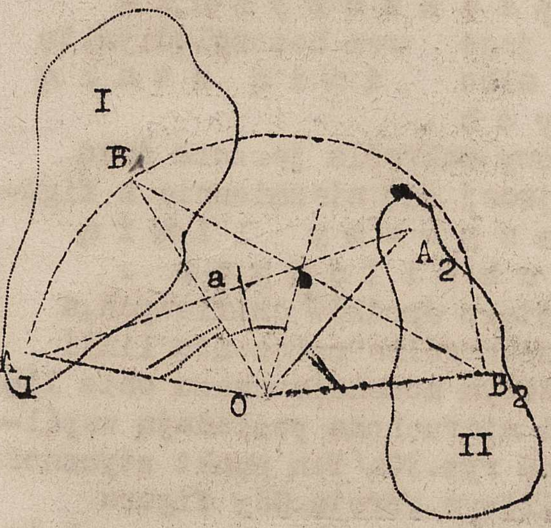
Ażeby poznać położenie płaskiej niezmiennej figury w jej płaszczyznie,wystarcza określić położenie dwóch dowolnych jej punktów na tej płaszczyznie,czyli położenie

jakiJkolwiek prostej,należącej do figury.Obierzmy płaszczy

jako płaszczyznę ruchu płaskiego,a punkty A_1 i B_1 jako dwa dowolne punkty płaskiej figury /rys.29/,niech A_2 i B_2 oznaczają położenie tych samych punktów po przesunięciu się figury w jej płaszczyznie w jakieś nowe położemie.

Ponieważ figura jest niezmienna,więc $A_1B_1 = A_2B_2$.

Połączmy za pomocą prostych A_1A_2 i B_1B_2 punkty A_1 z A_2 i B_1 z B_2 .Ze środków a i b otrzymamnych odcinków A_1A_2 i B_1B_2 wystawmy w płaszczyznie figury /papieru/ prostopadłe do nich; te prostopadłe przetną się w pewnym punkcie O,albowiem ruch figury uważamy za niepo' . r więc proste A_1A_2 i B_1B_2 nie będą wzajemnie równoległymi./ w wypadku ruchu postępowego,punkt O będzie też istniał,lecz w nieskończoność/.



Rys.29.

Wykażemy teraz,że obracając figurę dookoła osi,przeprowadzonej przez punkt O prostopadle do płaszczyzny figury,przesuniemy figurę z położenia /1/ w położenie /11/.Dostatecznie przekonać się o słuszności następujących warunków,niezbędnych do powyższego obrotu:

1/ odległości punktów A_1 i B_1 od osi obrotu O muszą pozostawać stałymi t.j. $A_1O = A_2O$ i $B_1O = B_2O$.

2/ kąt obrotu obu punktów A_1 i B_1 musi być jednakowy t.j. $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{B_1OB_2}$.

Połaczmy prostymi punkt O z punktami A_1,B_1,A_2, B_2 wtedy jest rzeczą oczywistą,że pierwszy warunek jest spełniony.

Z równości trójkatów $\widehat{A_1OB_1}$ i $\widehat{A_2OB_2}$ /trzy boki są równe / wynika,że $A_1OB_1 = A_2OB_2$.

Doda-jąc do obu stron kąt $\widehat{B_1OA_2}$,otrzymamy,że :

$$\widehat{A_1OB_1} + \widehat{B_1OA_2} = \widehat{A_2OB_2} + \widehat{B_1OA_2} ,$$

czyli $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{B_1OB_2} = 0$

Widzimy,więc,że obracając płaską figurę dookoła osi O o kąt 0 przesuniemy punkt A_1 w położenia A_2, a punkt B_1 w położenie B_2 c.b.d.o.

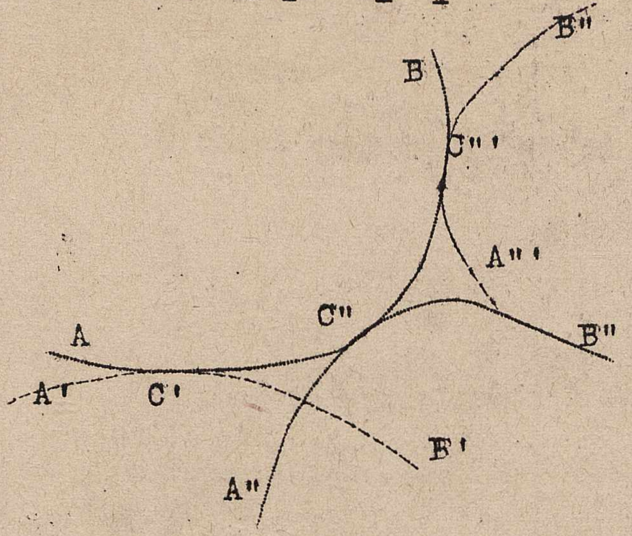
Ruch postępowy płaskiej figury możemy uważąć,jako obrót dookoła nieskończenie dalekiej osi obrotu,wtedy wypowiedziane w twierdzeniu ograniczenie odpada.

Udowodnione przed chwilą twierdzenie pozostaje prawomocnym i wtedy gdy położenia / 1 / i / 11 / płaskiej figury są nieskończenie do siebie bliskie.Możemy wtedy twierdzić, iż nieskończenie małe przesunięcie płaskiej figury w jej płaszczyźnie,możemy otrzymać,obracając figurę o nieskończenie mały kąt pewnego punktu,położonego w płaszczyźnie figury. Tem punkt z biegiem czasu zajmuje różne położenia i dla tego nazywamy go środkiem chwilowym obrotu. Srodek chwilowy poruszając się zakreśla na nieruchomej płaszczyźnie pewna krzywą będącą jego torem bezwzględnym,tę krzywą nazywamy pólodią albo linią stałą środków chwilowych. (centroida nieruchoma)
Oprócz tej krzywej środek chwilowy zakreśla jeszcze inną krzyw ą na płaszczyźnie,poruszającej się niezmiennie z figurą płaską tę krzywą nazywamy linią ruchomą środków chwilowych .

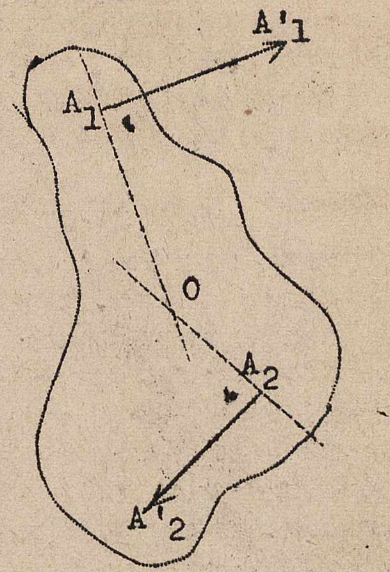
Na rys30. A B jest linia stałą środków chwilowych,a linie A 'B',A "B",A"' B"',są poszczególne położenia linii ruchomej środków chwilowych.W każdym momencie czasu obie linie środków chwilowych ruchoma i nieruchoma posiadają wspólny punkt styczności C',C",C'" /na rys.30a/ Ten punkt styczności C jest właśnie środkiem chwilowym obrotu.Gdy figura płaska porusza się,wtedy linia ruchoma środków chwilowych toczy się bez ślizgania się po linii nieruchomej środków chwilowych.

Prędkości punktów płaskiej figury w każdym momencie czasu są prędkościami obrotowymi,a zatym są prostopadłymi do prostyc łączących te punkty z chwilowym środkiem obrotu,więc aby wyznaczyć środek chwilowy dla każdego momentu czasu wystarcza mieć kierunki prędkości dwu punktów figury w danej chwili,albowiem wtedy punkt O przecięcia się prostopadłych wystawionych w tych punktach A_1 i A_2 do kierunków

prędkości A_2A_2' i $A_1A'_1$,będzie właśnie szukanym środkiem



Rys.30.



Rys31.

chwilowym tego momentu czasu /rys.31./.

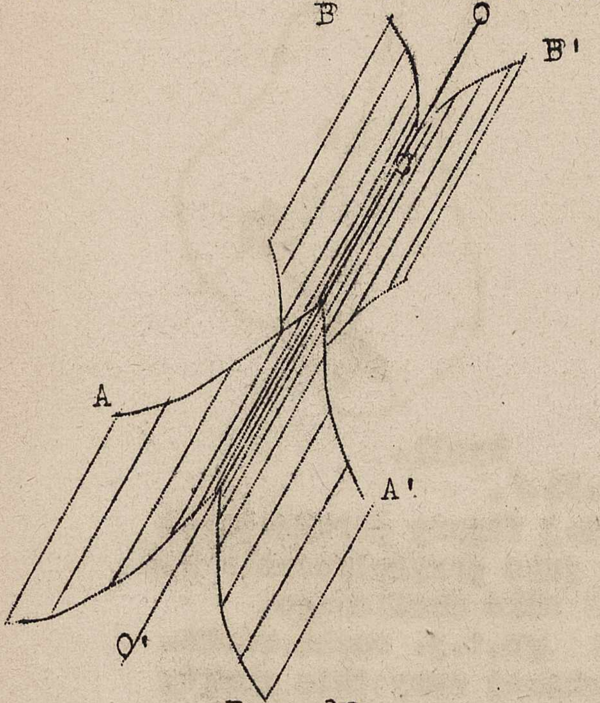
Przyspieszenia punktów płaskiej figury poruszającej się w swej płaszczyźnie ,określimy jako przyspieszenia ruchu o b r o t o w e g o dookoła środka chwilowego.

Wiemy,że podczas ruchu płaskiego,t.j. ruchu równoległegodo pewnej płaszczyzny nieruchomej wszystkie punkty bryły,położone na jednej i tej samej prostopadłej do tej płaszczyzny poruszają się zupełnie jednakowo.Więc wszystkie punkty położone na jednej i tej samej prostopadłej, prowadzonej do nieruchomej płaszczyzny w środku chwilowym, posiadają prędkość równą zeru.Zatym w bryle materialnej istnieje w każdej chwili nieruchoma prosta.Tę prostą nazywamy c h w i l o w ą o s i ą o b r o t u .

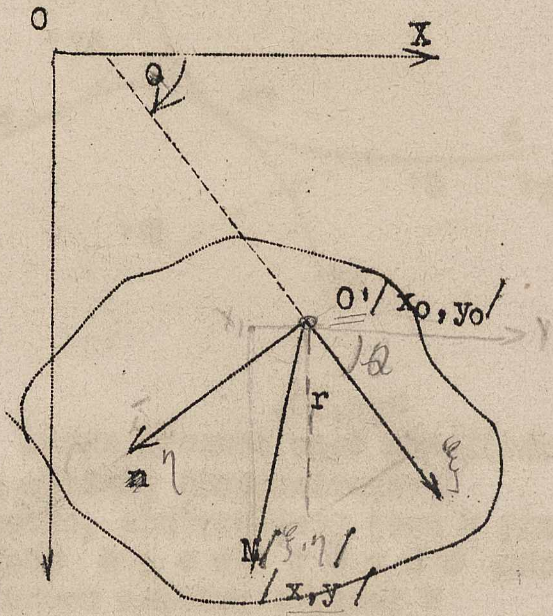
Gdy środek chwilowy zakreśla linie środków chwilowych, wtedy chwilowe osie za kreślają pewne powierzchnie cylindryczne,zwane p o w i e r z c h n i a m i c y l i n d r y c z n y m i o s i c h w i l o w y c h czyli a k s o i d a m i . Jedna z tych powierzchni mianowicie r u c h o m a p o w i e r z c h n i a c y l i n d r y c z n a o s i c h w i l o w y c h toczy się bez ślizgania się po drugiej stałej czyli n i e r u c h o m e j p o w i e r z c h n i c y l i n d r y c z n e j o s i c h w i l o w y c h .

Na rys.32. AB i A'B' są linie środków chwilowych, C - środek chwilowy w chwili obecnej, a OO' - oś chwilowa, zakreśla jąca dwie powierzchnie cylindryczne.

Dotychcza-s badaliśmy płaski ruch bryły materialnej geometrycznie, teraz rozpatrzymy ten sam ruch analitycznie. Przyjmiemy płaszczyznę w której porusza się płaska figura, jako płaszczyznę osi współrzędnych XOY /rys.33./ Oprócz tych osi weźmiemy jeszcze układ osi ξ, θ, η stale z figurą połączonych i leżących w jej płaszczyźnie. Oznaczmy przez θ



Rys. 32



Rys.33.

kąt utworzony m osiami OX i O' ξ. Współrzędne punktu M figury względem osi nieruchomych OXY oznaczmy przez /x,y/, a współrzędne tegoż punktu względem osi ruchomych odpowiednie przez ξ i η. Ponieważ płaska figury jest niezmiennymnukładem punktów, więc współrzędne ξ i η zachowują dla każdego punktu M figury wielkości stałe, gdy figura porusza się. Współrzędne x i y tego układu zmieniają się z biegiem czasu.

Jeżeli oznaczymy przez $/x_o, y_o/$ zmienne współrzędne punktu O', wtedy ruch płaskiej figury B,dzie określony, gdy będziemy równania ruchu skończone:

$$\theta = \chi/t/, \quad x_o = \varphi/t/, \quad y_o = \psi/t/, \quad ..../1/$$

Majac trzy funkcje czasu $\varphi/t/$, $\psi/t/$ i $\theta = \chi/t/$, określimy w każdym momencie czasu t położenie płaskiej figury względem nieruchomych osi OXY. Wzór przekszatcenia współrzędnych na płaszczyźnie dają nam zależności pomiędzy x,y, i ξ, η.

Takliński-Mechanika teoretyczna.

$$x = x_0 + \xi \cos\Theta - \eta \sin\Theta ,$$

$$y = y_0 + \xi \sin\Theta + \eta \cos\Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /2/.$$

A-by otrzymać równanie toru jakiegokolwiek pubktu M płaskiej figury, wstawimy we wzory /2/ zamiast ξ i η współrzędne niezmienne punkt M, a zamiast x_0, y_0 i Θ ich wyrażenia /1/, następnie wyeliminujemy z dwu otrzymanych wzorów czas t. Wtedy otrzymamy r ó w n a n i e t o r u p u n k t u M. w postaci następującej:

$$f/x,y/ = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /3/.$$

Znajdziemy teraz równanie krzywej, zakreślonej przez dany nieruchomy punkt M /x,y/ płaszczyzny XOY na ruchomej płaszczyźnie płaskiej figury. W tym celu nadajemy zmiennym współrzędnym x,y we wzorach /2/ pewne określone wartości, odpowiadające danemu punktowi i eliminujemy czas t. Oczywiście otrzymamy to samo równanie /3/:

$$f/x,y,\xi,\eta/ = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /4/$$

cała różnica polega na tym, że w równaniu /3/ x,y, są zmiennymi, a w równaniu /4/ x i y są wartości stałe, zmiennymi zaś są ξ i η, które w równaniu /3/ były stałymi. Dla tego równanie krzywej zakreślonej na płaszczyźnie płaskiej figury będzie miało postać:

$$f/\xi,\eta/ = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /5/$$

R o z p a t r z y m y p r ę d k o ś c i p u n k t ó w p ł a s k i e j f i g u r y. R z u t y p r ę d k o ś c i j a k i e g o b ą d ź p u n k t u f i g u r y n a n i e r u c h o m e o s i X O Y, n a p o d s t a w i e w z o r ó w /2/, b ę d ą:

$$v\cos/v,X/ = x' = x_0' - /\xi \sin\Theta + \eta \cos\Theta/\Theta' = x_0' - /y - y_0/\Theta' \quad \ldots /6/$$

$$v\cos/v,Y/ = y' = y_0' + /\xi \cos\Theta - \eta \sin\Theta/\Theta' = y_0' + /x - x_0/\Theta'$$

Pierwsze wyrazy w otrzymanych wyrażeniach na x' i y' mianowicie x_0' i y_0' są rzutami prędkości punktu $O'/x_0,y_0/$ na osie OX i OY, albowiem skończone równania ruchu tego punktu są $x_0 = \varphi/t/$, $y_0 = \psi/t/$.

Rozpatrzmy teraz drugie wyrazy $-/y - y_0/\Theta'$ i W tym celu przypuśćmy, że płaska figura obraca się w swej płaszczyźnie dookoła punktu O /rys.34./. Wprowadźmy współrzędne biegunowe w taki sposób, aby biegun był w punkcie O, a oś biegunowa zgodna z osią OX. Ponieważ mamy ruch obrotowy niezmiennej figury, więc promień każdego punktu M pozostaje podczas obrotu stałym. Mamy wtedy:

$$x = r\cos\Theta \qquad y = r\sin\Theta ,$$

przy czym $r^2 = x^2 + y^2$.

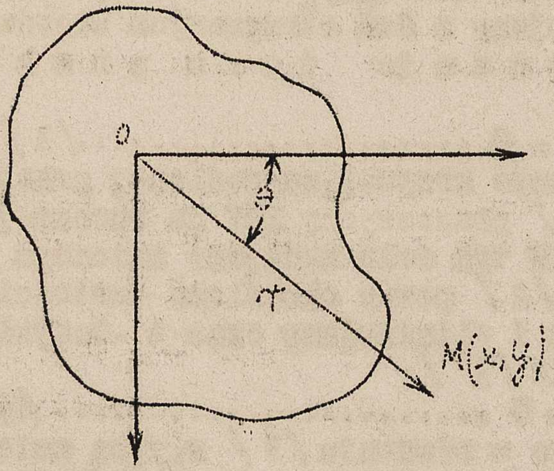
różniczkując te wyrażenia znajdziemy rzuty prędkości liniowej punktu M /x,y/ na osie OX i OY :

$$v \cos /v,X/ = x' = -r \sin \theta . \theta'$$

$$v \cos /v,Y/ = y' = r \cos \theta . \theta'$$

czyli $v \cos /v,X/ = -y\theta'$

$v \cos /v,Y/ = x\theta'$ ...../7/



Rys.34.

porównując wyrażenia $-/y-y_0/\theta'$ i $/x-x_0/\theta'$ ze wzorami /7/, widzimy, że rozpatrywane wyrazy przedstawiają rzuty na osie OX i OY liniowej prędkości obrotowej punktu M /x,y/ dookoła punktu O' $/x_0,y_0/$, przy czym promień obrotu M jest: $r = \sqrt{/x-x_0/^2 + /y-y_0/^2}$ rys.33/.

Zatym wzory /6/ stwierdzają, że p r ę d k o ś ć d o w o l n e g o p u n k t u p ł a s k i e j f i g u r y j e s t s u m ą g e o m e t r y c z n ą p r ę d k o ś c i l i n i o w e j o b r o t u d a n e g o p u n k t u d o o k o ł a p u n k t u O', i p r ę d k o ś c i p u n k t u O' t.j.

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{v_1}$$

przy czym v_0 oznacza prędkość punktu O', a v_1 prędkość obrotową punktu M dookoła punktu O'.

Punkt O' $/x_0,y_0/$ nazywamy biegunem danego ruchu płaskiego.

Wyznaczmy teraz taki punkt C $/x_c,y_c/$, k t ó r e g o p r ę d k o ś ć j e s t z e r e m. Aby prędkość była zerem x' i y' muszą być zerami, skąd, na zasadzie wzorów /6/, wynika, że:

$$x'_0 - /y_c - y_0/\theta' = 0, \quad y'_0 + /x_c - x_0/\theta' = 0$$

czyli

$$x_c = x_0 - \frac{y'_0}{\theta'} \quad i \quad y_c = y_0 + \frac{x'_0}{\theta'} \quad ..../8/$$

Z wzorów /8/ wynika, że współrzędne x_c, y_c punktu, będącego w danej chwili nieruchomym, są pewnymi funkcjami

czasu t. Za tym nieruchomy w danej chwili punkt figury C porusza się z biegiem czasu i zakreśla na płaszczyźnie XOY, pewną krzywą, której równanie otrzymamy, eliminując czas t z równań /8/.

Ten punkt C jest oczywiście środkiem chwilowym obrotu; a geometryczne miejsce środków chwilowych obrotów na płaszczyźnie XOY jest stałą linią środków chwilowych. Jej równanie otrzymujemy właśnie eliminując t z równań /8/:

$$F/ x_c, y_c / = 0$$

Korzystając z wzorów, wyrażających zależności między współrzędnymi ruchomymi x i y danego punktu, mianowicie:

$$\xi = / x - x_0 / \cos\theta + / y - y_0 / \sin\theta ;$$

$$\eta = -/ x - x_0 / \sin\theta + / y - y_0 / \cos\theta \quad \ldots\ldots /9/$$

i z wzorów /8/, znajdziemy współrzędne ξ_c i η_c środka chwilowego obrotu:

$$\xi_c = -\frac{y'_0}{\theta'}\cos\theta + \frac{x'_0}{\theta'}\sin\theta = / x'_0 \sin\theta - y'_0\cos\theta / \frac{1}{\theta'},$$

$$\ldots\ldots /10/$$

$$\eta_c = \frac{y'_0}{\theta'}\sin\theta + \frac{x'_0}{\theta'}\cos\theta = / x'_0\cos\theta + y'_0 \sin\theta / \frac{1}{\theta'};$$

Eliminując z równań /10/ czas t, znajdziemy równanie:

$$f / \xi_c, \eta_c / = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /11/$$

krzywej, którą środek chwilowy obrotu C zakreśla na ruchomej płaszczyźnie płaskiej figury, t.j. równanie linii ruchomej środków chwilowych.

Różniczkując równania /6/ względem czasu t, znajdziemy wyrażenia na rzuty przyspieszeń jakiegokolwiek punktu płaskiej figury.

$$w\cos/w,X/ = x'' = x''_0 - / y - y_0 / \theta'' - / y' - y'_0 / \theta' = x''_0 - / y - y_0 / \theta'' - / x - x_0 / \theta'^2$$

$$\ldots /12/$$

$$w\cos/w,Y/ = Y'' = y''_0 + / x - x_0 / \theta'' + / x' - x'_0 / \theta' = y''_0 + / x - x_0 / \theta'' - / y - y_0 / \theta'^2$$

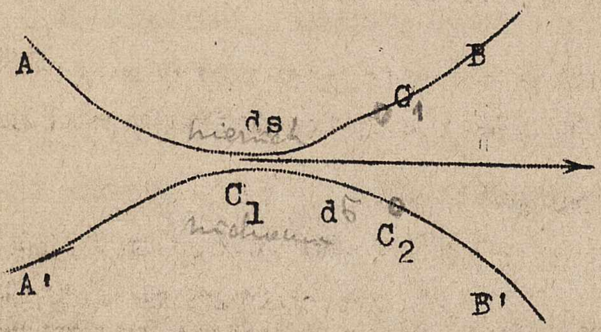
Gdy przyrównamy te wyrażenia do zera, otrzymamy dwa równania, z których możemy wyznaczyć współrzędne x, y takiego punktu, którego przyspieszenie w danym momencie czasu t jest

równe zeru, taki punkt nazywamy ś r o d k i e m p r z y s p i e s z e n i a .

Udowodnimy teraz, że p o d c z a s r u c h u p ł a s k i e j f i g u r y w jej p ł a s z c z y z n i e , l i n i a r u c h o m a ś r o d k ó w c h w i l o w y c h t o c z y s i ę b e z ś l i z g a n i a s i ę w z d ł u ż l i n i i n i e r u c h o m e j ś r o d k ó w c h w i l o w y c h .

Aby to udowodnić, musimy wykazać:

1/, że w każdym momencie czasu t /rys.35/ linia ruchoma A'B' i nieruchoma AB posiadają nie tylko wspólny punkt C, lecz i wspólną styczną .



Rys.35.

2/, że gdy w momencie czasu $t+\Delta t$ nieskończenie bliskie t punkt C_1 krzywej AB będzie się stykał z punktem C_2 krzywej A' B', to nieskończenie małe łuki CC_1 i CC_2 są równe ; oznaczając je przez ds i dσ, musimy mieć $d\sigma = ds$.

Z równań /8/, przedstawiających krzywą AB w postaci parametrycznej, wynika, że

$$tg\,\alpha = \frac{y'_c}{x'_c}$$

przy czym α jest kątem pomiędzy styczną CT, a osią OX.

Równania krzywej A' B', na zasadzie równań /9/ będą:

$$\xi_c = /x_c - x_0/\cos\theta + /y_c - y_0/\sin\theta \quad i$$

$$\eta_c = -/x_c - x_0/\sin\theta + /y_c - y_0/\cos\theta \qquad ..../13/.$$

Z tych równań parametrycznych krzywej A' B' wynika, że

$$tg\,\beta = \frac{\eta'_c}{\xi'_c},$$

przy czym β jest kątem pomiędzy styczną CT a osią $O\xi$.

Kąt γ , utworzony przez tę styczną CT i oś OX będzie

$$\gamma = \beta + \theta$$

$$\text{skąd}\quad tg\,\gamma = \frac{tg\beta + tg\,\theta}{1 - tg\beta . tg\theta} = \frac{\eta'_c\cos\theta + \xi'_c\sin\theta}{\xi'_c\cos\theta - \eta'_c\sin\theta}$$

Ale z równań /13/ znajdujemy, że

$$\xi'_c = (x'_c - x'_o)\cos\theta + (y'_c - y'_o)\sin\theta + [(y_c - y_o)\cos\theta - (x_c - x_o)\sin\theta]\theta'$$

$$\eta'_c = (y'_c - y'_o)\cos\theta - (x'_c - x'_o)\sin\theta - [(y_c - y_o)\sin\theta + (x_c - x_o)\cos\theta]\theta'$$

równa-nia zaś

$$y'_o = -(x_c - x_o)\theta' \quad \text{i} \quad x'_o = (y_c - y_o)\theta' ;$$

w stawia-jąc te wyrażenia we wzory poprzednie, znajdziemy:

$$\xi'_c = x'_c\cos\theta + y'_c\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /14/$$
$$\eta'_c = y'_c\cos\theta - x'_c\sin\theta$$

W tedy wyrażenie na $\operatorname{tg}\gamma$ przyjmie postać:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y'_c}{x'_c} = \operatorname{tg}\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /15/$$

t.j. w punkcie C obie krzywe A B i A 'B' posiada-ją wspólną styczną.

Ze wzorów /14/ wynika, że

$$d\sigma^2 = (\xi'^2_c + \eta'^2_c)\,dt^2 = (x'^2_c + y'^2_c)\,dt^2 = ds^2, \text{c.b.d.o.} \quad /16/$$

Za uważymy, że wielkości x'_c i y'_c są rzutami na osie OX i OY prędkości ruchu środka chwilowego C wzdłuż nieruchomej linii środków chwilowych /AB/, a wielkości ξ'_c i η'_c są rzutami prędkości ruchu środka chwilowego C wzdłuż ruchomej linii środków chwilowych /A' B' / na osie ruchome O'ξ O'η.

W zory /15/ i /16/ stwierdzają, że w każdym momencie t, prędkości ruchu środka chwilowego C wzdłuż obu linii środków chwilowych są jednakowe.

Płaski ruch bryły materialnej ma wielkie zastosowanie w mechanice stosowanej, gdy badamy płaskie mechanizmy.

Ja ko przykład rozpatrzymy następujący, bardzo prosty ruch płaskiej figury w jej płaszczyźnie /rys.36/. Przypuśćmy że na nieruchomej płaszczyźnie znajduje się odcinek prostej $A_1 A_2$ o długości 2R, i że ten odcinek porusza się w taki sposób, iż jego koniec A_1 stale ślizga się wzdłuż osi OY, a koniec A_2 - wzdłuż osi OX.

Określimy 1/ krzywą, zakreśloną przez dany punkt płaszczyzny ruchomej na płaszczyźnie nieruchomej,

2/ krzywą, którą wykreśla dany punkt płaszczyzny nieruchomej na płaszczyźnie ruchomej,

3/ linię nieruchomą środków chwilowych obrotów i

4/ linię ruchomą środków chwilowych.

Ja ko początek ruchomych osi współrzędnych $\xi O'\eta$, obierzemy środek O' danego odcinka $A_1 A_2$, wtedy :

$A_1O' = A_2O' = R$, oś $O'\eta$ weźmiemy prostopadle do prostej A_1A_2, a oś $O'\xi$ zgodnie z A_1A_2. Współrzędne punktu A_1 względem osi $\xi O'\eta$ są $\xi_1 = -R$, $\eta_1 = 0$, a punkt A_2 odpowiednio $\xi_2 = R$, $\eta_2 = 0$.

Współrzędne punktu A_1 względem osi nieruchomych XOY są: $x_1 = 0$, y_1 = pewną funkcją czasu. Współrzędne punktu A_2 odpowiednio: x_2 = funkcja czasu i $y_2 = 0$. Kąt θ, utworzony kierunkami osi $O'\xi$ i osi OX, jest też pewną funkcją czasu. Ten kąt liczymy od osi OX do osi $O'\xi$. Stosując pierwszy ze wzorów /2/ do punktu A_1, znajdziemy

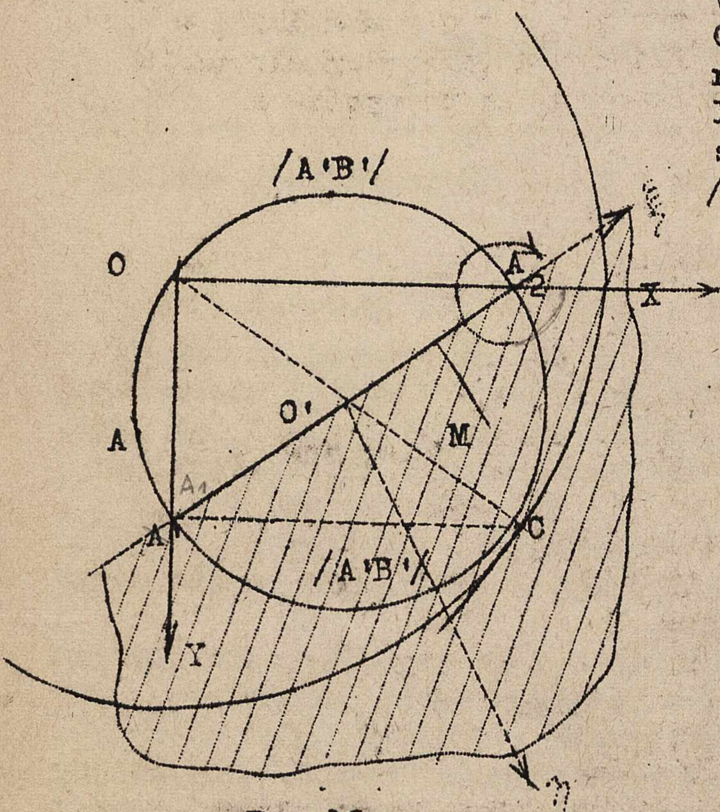
$$0 = x_0 - R\cos\theta$$

a stosując drugi wzór ze wzorów /2/ do punktu A_2, otrzymamy:

$$0 = y_0 + R\sin\theta$$

przy czym x_0 i y_0 są współrzędne punktu O' względem osi nieruchomych XOY.

Otrzymaliśmy dwa równania z trzema niewiadomymi x_0, y_0, i θ, ale kąt θ z biegiem czasu może zmieniać się w sposób dowolny, ponieważ, np. punkt A_1 może poruszać się wzdłuż osi OY z dowolną prędkością.



Rys.36.

Uważając tedy $\theta = F/t/$, znajdziemy następujące równania, określające ruch płaskiej figury:

$$x_0 = R\cos\theta,\quad y_0 = -R\sin\theta,\quad \theta = F/t/ \quad \ldots\ldots\ldots /17/.$$

Wyznaczymy teraz równanie toru jakiegokolwiek punktu $M/\xi,\eta/$ płaskiej figury współrzędnych x,y t.j. krzywej nakreślonej przez punkt $M/\xi,\eta/$ na płaszczyźnie nieruchomej XOY. Użyjemy znowu wzorów /2/, które teraz możemy napisać w ten sposób:

$$x = /\xi + R/\cos\theta - \eta\sin\theta,$$
$$y = /\xi - R/\sin\theta + \eta\cos\theta; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /18/$$

Musimy wyeliminować czas t; w tym celu wyeliminujemy θ zawierającą czas; rozwiążemy pierwsze równanie względem

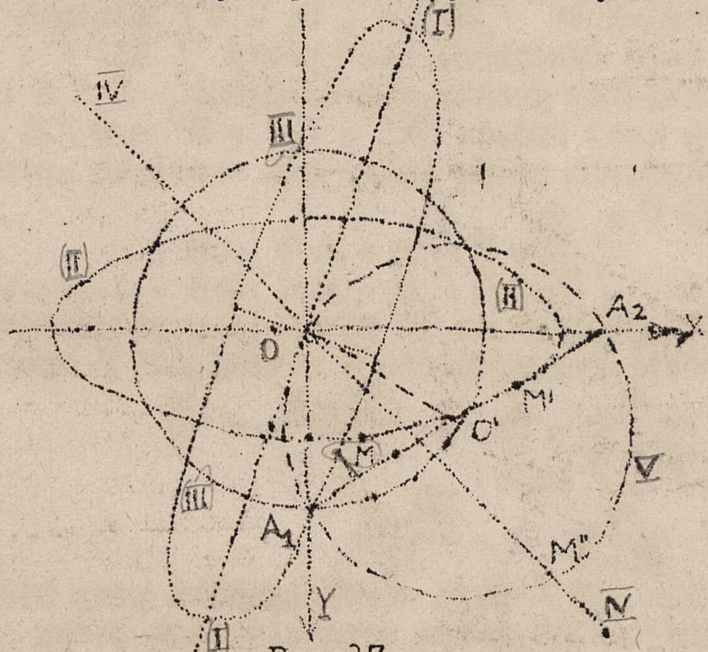
cos θ i wstawimy wynik w drugie, a następnie rozwiążemy drugie równanie /18/ względem sin θ i wstawimy go w pierwsze równanie /18/, wtedy znajdziemy :

$$\sin\theta(\xi^2+\eta^2-R^2)=(\xi+R)\cdot y-\eta x \quad \text{i} \quad \cos\theta(\xi^2+\eta^2-R^2)=(\xi-R)x+\eta y.$$

Podnosząc otrzymane wyrażenia do kwadratu, a następnie dodając, otrzymamy równanie poszukiwanej krzywej :

$$\left[(\xi-R)x+\eta y\right]^2+\left[(\xi+R)y-\eta x\right]^2=(\xi^2+\eta^2-R^2)^2 \quad ....../19/$$

W tym równaniu ξ i η są wielkościami stałymi, a x i y - zmiennymi; równanie /19/ względem x,y jest stopnia drugiego, zatem poszukiwana krzywa jest k r z y w ą d r u g i e g o s t o p n i a, a mianowicie e l i p s ą, albowiem nie posiada nieskończenie odległych punktów, jak to wynika z wzorów / 18 /.



Rys.37.

Zatem każdy punkt M płaskiej figury zakreśla na płaszczyźnie nieruchomej elipsę o środku, znajdującym się w początku współrzędnych O; osie elipsy w ogólności nie są zgodne z osiami OX i OY. /np. osie elipsy /1/ zakreślone przez punkt M na rys. 37/.

Rozpatrzmy teraz następujące ważne przypadki szczególne:

1/ dla punktów płaskiej figury, znajdujących się na prostej A_1A_2, tj. dla takich punktów, dla których = 0, równanie powyższego toru przybierze postać następującą :

$$(\xi-R)^2x^2+(\xi+R)^2y^2=(\xi^2-R^2)^2= \quad -R)^2(\xi+R)^2$$

czyli

$$\frac{x^2}{/\xi + R/^2} + \frac{y^2}{/\xi - R/^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /20/$$

Z równania /20 / wynika,że każdy punkt M położony na prostej $A_1 A_2$,zakreśla elipsę o środku w początku współrzędnych 0 i o osiach ,których kierunki są zgodne z osiami w-spółrzędnych XOY /np. elipsa /II/ na rys 37./ą

2/ Znajdźmy punkty płaskiej figury,które zakreślają na nieruchomej płaszczyźnie koło .Wteydy równanie toru musi mieć postać:

$$x^2 + y^2 = r^2 ,$$

to znaczy ,że w równaniu /19 / współczynniki przy x^2 i y^2 muszą być równe ,a współczynnik przy xy musi być zerem. Pierwsze otrzymamy,gdy $\xi = 0$, a drugie,gdy $\eta = 0$. Zatym koło zakreśla tylko jeden punkt płaskiej figury,mianowicie środek O' /$\xi = 0$, $\eta = 0$/ odcinka A_1A_2 /na rys 37 to koło oznaczone jest przez / III / .

3/ Znajdźmy punkty zakreślające linie proste . Wtedy musi być,iż $\xi^2 + \eta^2 - R^2 = 0$ /21 /.Równanie /19 / przedstawia wtedy układ dwu prostych ,przechodzących przez punkt O .

$$/\xi + R/\, y - x.\eta = 0$$

$$\text{i} \quad /\xi - R/\, x + y.\eta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /22/$$

Łatwo zauważyć,że te równania przedstawiają jedną i tę samą prostą.Rzeczywiście z równań /22 / wynika,że:

$$\frac{\eta}{\xi + R} = \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \frac{\xi - R}{\eta} = -\frac{y}{x}$$

a równanie /21 / daje

$$\frac{\eta}{\xi + R} = -\frac{\xi - R}{\eta}$$

więc równania /22 / mają współczynniki przy niewiadomych x y proporcjonalne,zatym przedstawiają jedną i tę samą prostą.

Równanie /21 / stwierdza więc,iż linie proste zakreślają te punkty płaskiej figury,które znajdują się na kole, przechodzącym przez punkty A_1A_2 i mającym środek w punkcie O.Na rys.37. to koło oznaczone jest przez /V /,a prosta, za-kreślona przez punkt M" tego koła przez /IV /.

Zauważymy,że punkt koła /21 / zakreśla tylko pewien skończony odcinek prostej /22 /.Z wzorów /18 / i warunku /21 / wynika więc,że :

$$x^2 + y^2 = 2R^2 + 2R\,/\xi \cos 2\theta + \eta \sin 2\theta/$$

skąd

$$x^2 + y^2 \leqslant 2R^2 + 2R\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

ponieważ punkt / x,y / leży na kole /21 / ,więc :

$$x^2 + y^2 \leqslant 4R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /23 /$$

ory: punkt koła /21/ zakreśla tylko tę część prostej /22/ która jest za warta wewnątrz koła

$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

Ażeby otrzymać krzywą, która zakreśla na płaszczyźnie ruchomej punkt obrany na płaszczyźnie nieruchomej, należy tylko w równaniach /18/ lub wynikającym z nich równaniu /19/, uważać ξ i η za wielkość zmienną, a wielkościom x i y nadać dane wartości stałe. Widzimy, że ta krzywa jest pewną krzywą czwartego stopnia, mianowicie krzywą należącą do klasy e p i t r o c h o i d przedstawionych na rys.38.

Znajdźmy teraz nieruchomą linię środków chwilowych. W tym celu podstawimy w równania /8/

$$x_c = x_0 - \frac{y_0'}{\theta'}, \quad y_c = y_0 + \frac{x_0'}{\theta'}$$

wyrażenia /17/ na x_0, y_0 i θ wtedy otrzymamy, że

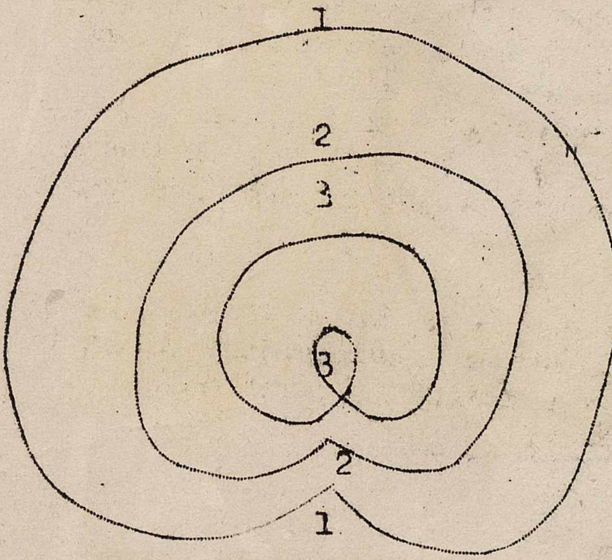
$$x_c = R\cos\theta + R\cos\theta = 2R\cos\theta$$

$$y_c = R\sin\theta - R\sin\theta = -2R\sin\theta$$

skąd $x_c^2 + y_c^2 = 4R^2$ ...../24/

t.j. nieruchomą linią środków chwilowych jest koło opisane z początku współrzędnych O, jako ze środka promieniem $2R = A_1A_2$.

Aby otrzymać ruchomą linię środków chwilowych użyjemy wzorów /10/ lub /13/, kładąc w nich:



Rys.38.

$x_0 = R\cos\theta$, $y_0 = -R\sin\theta$ wtedy $x_c = 2R\cos\theta$, $y_c = -2R\sin\theta$

wtedy $\xi_c = R\cos^2\theta - R\sin^2\theta = R\cos 2\theta$

$\eta_c = -R\sin\theta\cos\theta - R\sin\theta\cos\theta = -R\sin 2\theta$............/25/

skąd wynika, że

$$\xi_c^2 + \eta_c^2 = R^2 \text{.............................../26/}$$

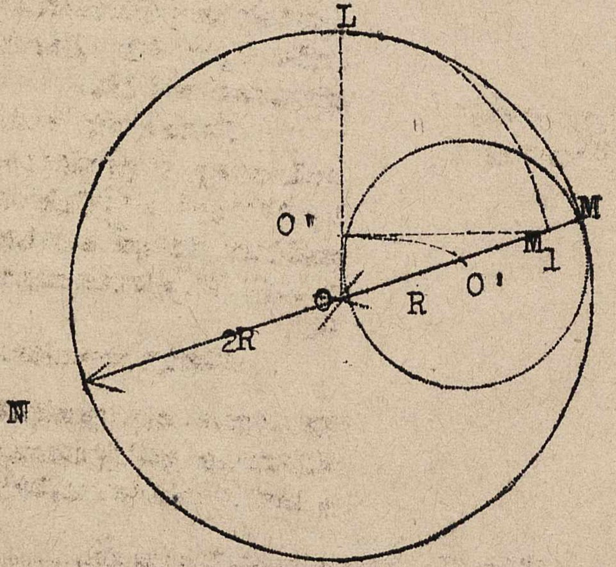
t.j. ruchoma linia środków chwilowych jest kołem opisanym z punktu O', jako ze środka promieniem

$$R = \frac{1}{2} A_1 A_2 \text{. /rys.39./.}$$

Łatwo przekonamy się o słuszności tych wyników bezpośrednio z rys 36 i 39. Rzeczywiście, aby otrzymać środek chwilowy, postępujemy jak na rys 31. t.j. , przeprowadzamy prostopadłe w punkcie A_1 do prędkości tego punktu t.j.

do osi OY,po której ten punkt porusza się i w punkcie A_2 do osi OX.Punkt C przecięcia się tych prostych jest właśnie środkiem chwilowym,a ponieważ $OC = A_1A_2 = 2R$ więc oczywiście że geometrycznym miejscem punktów C na płaszczyźnie nieruchomej jest koło,opisane z punktu O promieniem 2R.

Z drugiej strony,oczywiście $O'C = O-A_2 = R$ dla tego też środek chwilowy C jest oddalony od punktów O'-środka



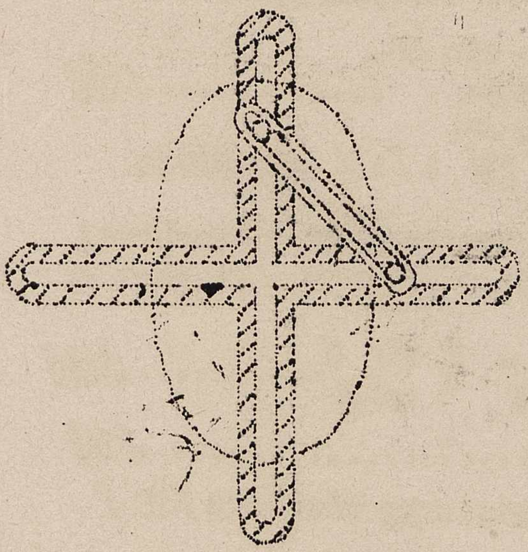
Rys.39.

odcinka prostej A_1A_2 - o długość stałą $O'C = R$,a zatym geometrycznym miejscem tych środków na płaszczyźnie ruchomej jest koło o środku w punkcie O' o promieniu równym R.

Następnie z łatwością przekonamy się z rys 39.,iż dowolny punkt koła o promieniu R,toczącego się wewnątrz drugiego koła o promieniu 2R,rzeczywiście zakreśla linię prostą.Niech położenie początkowe tych kół będzie takie,że małe koło potoczyło się po dużym o długości łuku ML.Wtedy długości łuków ML i LM_1 muszą być jednakowe,a więc punkt M_1 znajduje się na prostej OM,pruechodzącej przez punkt O, t.j.,gdy małe koło toczy się po dużym,wtedy punkt M zakreśla właśnie średnicę MOM /rys.39. /.

Na podstawie rozpatrzonego przed chwilą ruchu płaskiego,jest urządzony t.zw. c y r k i e l e l i p t y c z n y ,którego urządzenie widzimy na rys.40,nie wymagającym objaśnień.Cyrklem eliptycznym posługujemy się przy kreśleniu elips.

Jako drugi przykład płaskiego ruchu figury w swej płaszczyźnie rozpatrzymy ruch mechanizmu korbowego /rys.41./ Niech T będzie tłokiem, TBA drągiem tłoka, AO'-drąg korbowodu, OO'-korba, O-oś wału i A-krzyżulec, poruszający się, wzdłuż nieruchomych wodzideł EF podstawy N.



Rys.40.

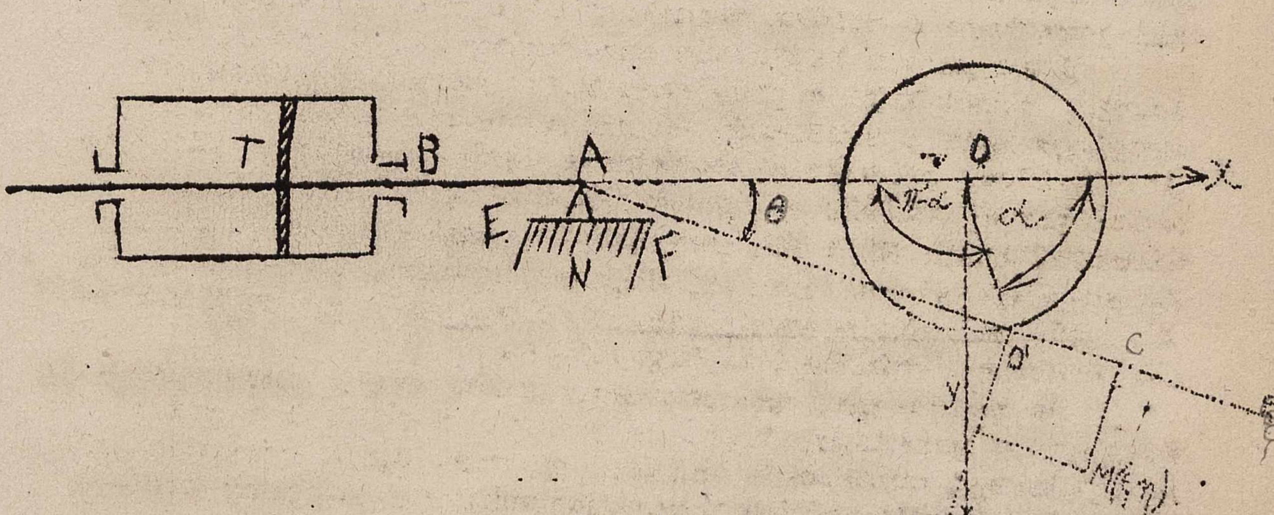
Obierzemy kierunek drąga tłoka BA O jako nieruchomą oś OX, biorąc początek współrzędnych w punkcie O, oś OY skierujemy pionowo w dół.

Początek ruchomych osi weźmy w punkcie O' korby OO'; oś O'ξ skierujemy wzdłuż drąga korbowodu AO', a kąt XAξ oznaczymy przez θ.

Wtedy współrzędne nieruchome x,y punktu M niezmiennie połączonego z drągiem korbowodu, będą:

$$x = x_0 + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /27/$$

$$y = y_0 + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta$$



Rys.41.

przy czym kąt θ jest pewną funkcją czasu t, którą wyznaczymy z proporcji:

$$\sin\theta : \sin\ \ = OO' : AO'$$

ponieważ kąt α, określający ruch korby OO' czyli ruch obrotowy wału O, uważamy za znaną funkcją czasu t;

Np. gdy wał O obraca się jednostajnie, wtedy $\alpha = nt$, przy czym

$$n = \frac{2\pi K}{60}$$ i K jest liczbą obrotów wału O na minutę

Oznaczymy $OO' = r$, $AO' = L$, wtedy otrzymamy, że:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{r}{L}\sin\alpha \\ x_0 &= r\cos\alpha \\ y_0 &= r\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /28/$$

przy czym $\alpha = \alpha(t)$. Zatym równania /27/ i /28/ określają ruch punktu $M(\xi, \eta)$

Aby znaleźć tor tego punktu, zakreślony na nieruchomej płaszczyźnie OXY, wyeliminujemy czas t, lub α /co jest to samo/ z równań następujących:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta \\ y &= r\sin\alpha + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /29/$$

$$\sin\theta = \frac{r}{L}\sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /30/$$

W tym celu postępujemy tak: napiszmy równania /29/ w postaci:

$$\begin{aligned} \xi\cos\theta - \eta\sin\theta &= x - r\cos\alpha \\ \xi\sin\theta + \eta\cos\theta &= y - r\sin\alpha \end{aligned} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /31/$$

aby wyeliminować θ podniesiemy je do kwadratu i dodamy, wtedy znajdziemy:

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 + r^2 - 2rx\cos\alpha - 2ry\sin\alpha$$

Oprócz tego z równań /31/ znajdziemy że:

$$\sin\theta = \frac{\xi(y - r\sin\alpha) - \eta(x - r\cos\alpha)}{\xi^2 + \eta^2}$$

Eliminując z tego równania i z równania /30/ $\sin\theta$ otrzymamy:

$$\frac{r}{L}\sin\alpha = \frac{\xi(y - r.\sin\alpha) - \eta(x - r.\cos\alpha)}{\xi^2 + \eta^2}$$

Otrzymujemy zatym następujące dwa równania, zawierające tylko funkcję czasu t

$$\begin{aligned} 2rx\cos\alpha + 2ry\sin\alpha &= x^2 + y^2 + r^2 - \xi^2 - \eta^2 \\ L\eta\cos\alpha - (L\xi + \xi^2 + \eta^2)\sin\alpha &= \frac{L}{r}(\eta x - \xi y) \end{aligned} \ldots\ldots\ldots /32/$$

Z tych równań obliczymy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$; wstawiając je w tożsamość:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

otrzymamy poszukiwaną zależność między x i y, innymi słowy

znajdziemy równanie toru punktu M na nieruchomej płaszczyźnie XOY. Łatwo się przekonać, że ten tor będzie pewną krzywą czwartego stopnia.

Aby napisać równanie nieruchomej linii środków chwilowych, możemy użyć równania /8/, albo musimy napisać wyrażenia na x' i y' przyrównać je do zera i z otrzymanych w ten sposób równań korzystając z równania /30/ wyeliminować czas t, lub α. Wtedy otrzymamy, że:

$$x' = -r \sin\alpha\cdot\alpha' - \sin\Theta\cdot\Theta' - \eta\cos\Theta\cdot\Theta' = 0$$
$$y' = r\cos\alpha\cdot\alpha' + \cos\Theta\cdot\Theta' - \eta\sin\Theta\cdot\Theta' = 0 \quad\ldots\ldots /33/$$

i $\cos\Theta\cdot\Theta' = \frac{r}{L}\cos\alpha\cdot\alpha' \quad\ldots\ldots /34/$

Oznaczając przez x_c i y_c współrzędne punktu nieruchomej linii środków chwilowych, na podstawie równań /31/ i równania /34/ będziemy mieli:

$$L\sin\alpha\cos\Theta + y_c\cos\alpha - r\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$L\cos\Theta + x_c - r\cos\alpha = 0 \quad\ldots\ldots /35/$$

Na zasadzie drugiego z równań /35/, pierwsze równanie /35/ możemy napisać następująco:

$$y_c = x_c \operatorname{tg}\alpha \quad\ldots\ldots /36/$$

Ale z równania /30/ wynika, że:

$$L\cos\Theta = \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\alpha}$$

skąd na podstawie drugiego równania /35/ mamy:

$$/x_c - r\cos\alpha/^2 = L^2 - r^2\sin^2\alpha$$

Równanie /36/ daje nam:

$$\cos\alpha = \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{y_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}$$

wstawiając te wyrażenia w poprzednie równanie, otrzymujemy, że:

$$/x_c^2 + y_c^2//x_c^2 - L^2 + r^2/^2 = 4r^2x_c^4 \quad\ldots\ldots /37/$$

Jest to szukane równanie nieruchomej linii środków chwilowych. Jak widzimy krzywa ta jest stopnia szóstego.

Znajdźmy ruchomą linię środków chwilowych, oznaczmy przez ξ_c i η_c współrzędną jakiegobądź jej punktu, wtedy będziemy mieli równania:

$$r \sin\alpha + \xi_c \sin\theta \frac{\theta'}{\alpha'} + \eta_c \cos\theta \frac{\theta'}{\alpha'} = 0$$

$$r \cos\alpha + \xi_c \cos\theta \frac{\theta'}{\alpha'} - \eta_c \sin\theta \frac{\theta'}{\alpha'} = 0$$

$$\frac{\theta'}{\alpha'} = \frac{r \cos\alpha}{L \cos\theta}$$

z których wynika,że:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{L + \xi_c}{\eta_c} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\xi_c^2 + \eta_c^2 + L\xi_c}{L\eta_c}$$

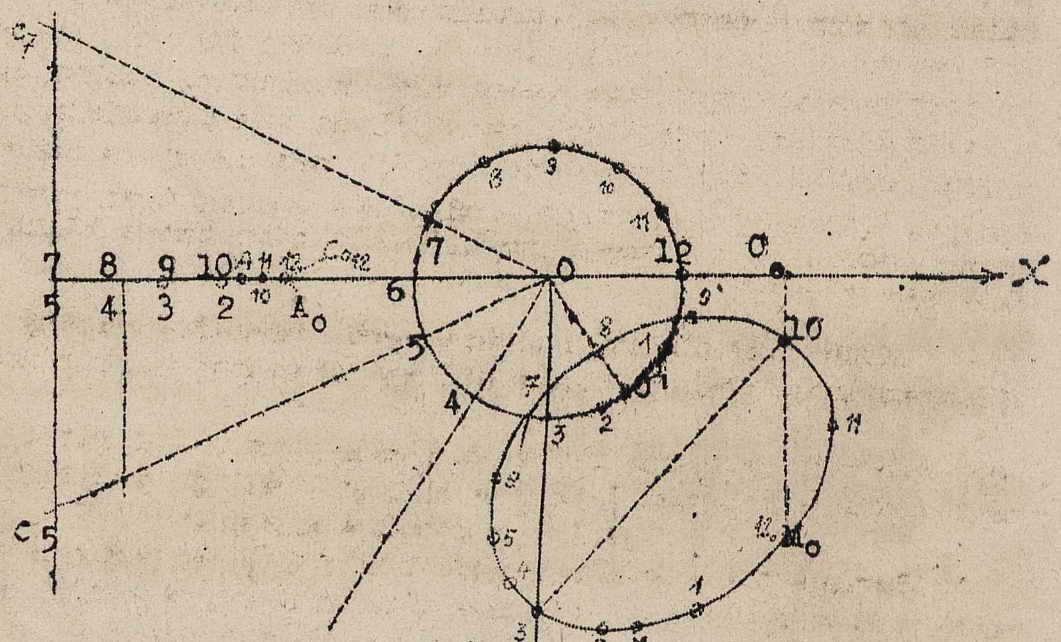
Posługując się równaniem:

$$L \sin\theta = r \sin\alpha,$$

znajdziemy z łatwością równanie szukanej krzywej,która też będzie krzywą stopnia szóstego.

Ostatni przykład wskazuje że,nawet dla takiego prostego i rozpowszechnionego w technice ruchu,jakim jest ruch mechanizmu korbowego,równania torów,zakreślonych przez punkt ruchomej lub nieruchomej płaszczyzny,równania linii środków chwilowych i inne,mają kształt w znacznym stopniu skomplikowany i chociaż nadają się do obliczania poszukiwanych wielkości,ale nie dają nam bezpośredniego pojęcia o własnościach tych krzywych i tych wielkości.

Dla tegoteż,aby je poznać,a zarazem wyznaczyć poszukiwane wielkości w przybliżeniu dostatecznym do potrzeb praktycznych,posługujemy się metodą graficzną,np.aby wykreślić



Rys.42

tor punktu M na nieruchomej płaszczyznie XOY, zaznaczymy jego położenie M_0, odpowiadające położeniu korby OO', gdy ona ma kierunek zgodny z kierunkiem drąga korbowodu A O' /rys42"/. Wtedy krzyżulec A zajmie położenie A_0.

Podzielimy koło zakreślone przez koniec O' korby OO' na kilka równych części /na rys.42 mamy 12 podziałek/, z tych punktów podziału zakreślmy promieniem równym O'A = L łuki na prostej A O /osi OX/ - otrzymamy położenie punktu A odpowiadające położeniom 1,2,3,... 11,12 punktu O' na kole. /Te położenia punktu A na rys.42. są oznaczone odpowiednimi numerami./

Weźmiemy więc trójkąt kreślarski i odłożymy od wierzchołka jego kąta prostego na jednej przyprostokątnej długości C_0A_0 i C_0O', a na drugiej przyprostokątnej długość C_0M_0; jeżeli teraz będziemy przykładać ten trójkąt w ten sposób, że punkt jego A_0 będzie zajmował kolejno położenia 1,2,.....11,12, na prostej OA /osi OX/, a punkt jego O_0' kolejno odpowiednie położenie na kole i będziemy rzutować odpowiednie położenia punktu M_0, otrzymamy wtedy 12 punktów na płaszczyznie XOY, będących położeniami punktu M; krzywa przechodząca przez te punkty będzie właśnie torem punktu M na płaszczyznie XOY.

Aby otrzymać nieruchomą linię środków chwilowych skorzystamy z tego, że normalna do punktu toru O' jest odpowiednim położeniem korby, t.j. promieniem OO'; normalna zaś do toru punktu A jest prostopadłą do prostej OA/ osi OX/, wystawioną z rozpatrywanego położenia chwilowego punktu A; punkt przecięcia się tych dwóch prostych da nam odpowiednie położenie środka chwilowego /na rys.42., oznaczone są położenia C_0, 12, C_7, C_6, C_5 i C_4 tego środka/. Za pomocą tych punktów możemy wykreślić w pewnym przybliżeniu nieruchomą linię środków chwilowych.

Podobne graficzne badanie ruchu płaskiej figury w jej płaszczyznie stale stosuje się np. w teorji mechanizmów.

4. Ruch punktów bryły materialnej, obracającej się dookoła punktu nieruchomego.

Ruchem obrotowym bryły materialnej dookoła punktu nazywamy taki ruch bryły, podczas którego tylko jeden punkt jej pozostaje nieru-

c h o m y m.

Ponieważ odległość każdego punktu M bryły materialnej od nieruchomego punktu O tej bryły pozostaje niezmienną, w ięc podczas obracania się bryły dookoła punktu O, każdy punkt M porusza się po powierzchni kuli, której środek znajduje się w nieruchomym punkcie bryły O, a promień jest równy odległości OM.

Jeżeli będziemy rozpatrywali kilka punktów M_1, M_2 ...., znajdujących się na jednym i tym samym promieniu OO i punkt M, w tedy widzimy, że każdy z tych punktów będzie poruszał się też po powierzchni kuli, przyczym wszystkie te kule będą współśrodkowemi. Ponieważ bryła jest niezmienną, punkty M_1 M_2,..., będą stale leżały na promieniu wspólnym z punktem M, a dlatego, gdy będziemy znali ruch punktów położonych na powierzchni jednej ze w zkazanych kul, wtedy będzie nam znany ruch każdeg innego punktu bryły materialnej, t.j. będzie określony ruch samej bryły materialnej.

Jest rzeczą oczywistą, że dostatecznie jest znać ruch tylko dwóch punktów, znajdujących się na powierzchni tej samej kuli, aby znać ruch bryły materialnej, albowiem dołączając do tych dwóch punktów, punkt nieruchomy O, otrzymamy trzy punkty, nieleżące na jednej prostej; ruch tych trzech punktów skreśla ruch całej bryły.

Obierzmy napowierzchni jednej z kul, mających środek w nieruchomym punkcie O, dwa dowolne punkty A i B; przypuśćmy że na początku i w końcu jąkiegoś czasu czasu te punkty za jmują odpowiednie położenia A_1, B_1 i A_2, B_2. Udowodnimy następujące twierdzenie d'A l a n b e r t - E u l e r'a;

Twierdzenie. G d y b r y ł a m a t e r i a l n a o b r a c a s i ę d o o k o ł a p u n k t u, w t e d y k a ż d e j e j p r z e s u n i ę c i e m o ż e m y o t r z y m a ć z a p o m o c ą o b r o t u b r y ł y d o o k o ł a p e w n e j o s i, p r z e c h o d z ą c e j p r z e z n i e r u c h o m y p u n k t.

Ponieważ to twierdzenie jest analogiczne do twierdzenia Bernoulli-Chasls'a, dlatego przytoczymy tu tylko streszczenie jego dowodu. Połączymy punkty A_1 i B_1 z punktami A_2 i B_2 za pomocą łuków wielkich kół; ze środków a i b tych łuków A_1A_2 i B_1B_2 przeprowadzimy łuki wielkich kół a C i b C odpowiednio prostopadłe do A_1, A_2 i $B_1 B_2$. Punkt C przecięcia się łuków a C i B C połączmy za pomocą prostej CO z nieruchomym punktem bryły O. Otrzymamy

w tem sposób prosta OO jest właśnie tą osią, dookoła której obrotem punkty A_1 i B_1 przeprowadzimy w położenia A_2 i B_2.

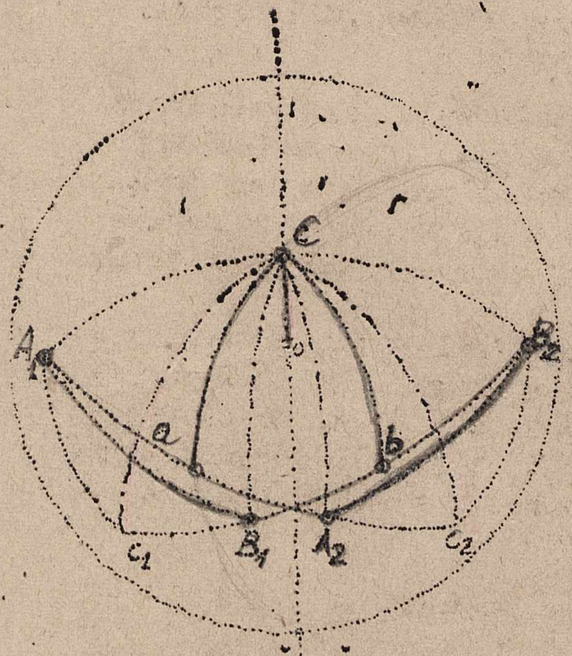
Aby się o tem przekonać wystarczy dowieść prawdziwość następujących równań:

$A_1C = A_2C, B_1C = B_2C,$

$\widehat{A_1CA_2} = B_1CB_2$

co możemy uczynić zupełnie taksamo, jak w dowodzie twierdzenia Bernoulli-Chslesąda, z tą jedyną różnicą, że tam mieliśmy do czynienia z trójkątami o bokach prostolinijnych, a obecnie mamy trójkąty sferyczne.

Chociaż wiemy już, że ruch dwóch punktów bryły materialnej w obecnym ruchu obrotowym dookoła punktu nieruchomego w zupełności określa ruch całej bryły, ale moglibyśmy bezpośrednio dowieść, że podczas tego obrotu dookoła osi O C, który przeprowadza punkty A i B z położeń A_1 i B_1 w położenia A_2B_2, każdy inny punkt tej bryły przesunie się z początkowego jego położenia C_1 w końcowe położenie C_2. Pozostawiamy czytającym przeprowadzić dowód tego zdania, opierając się na liniach łuków wielkich kół, nakreślonych na rys.43.

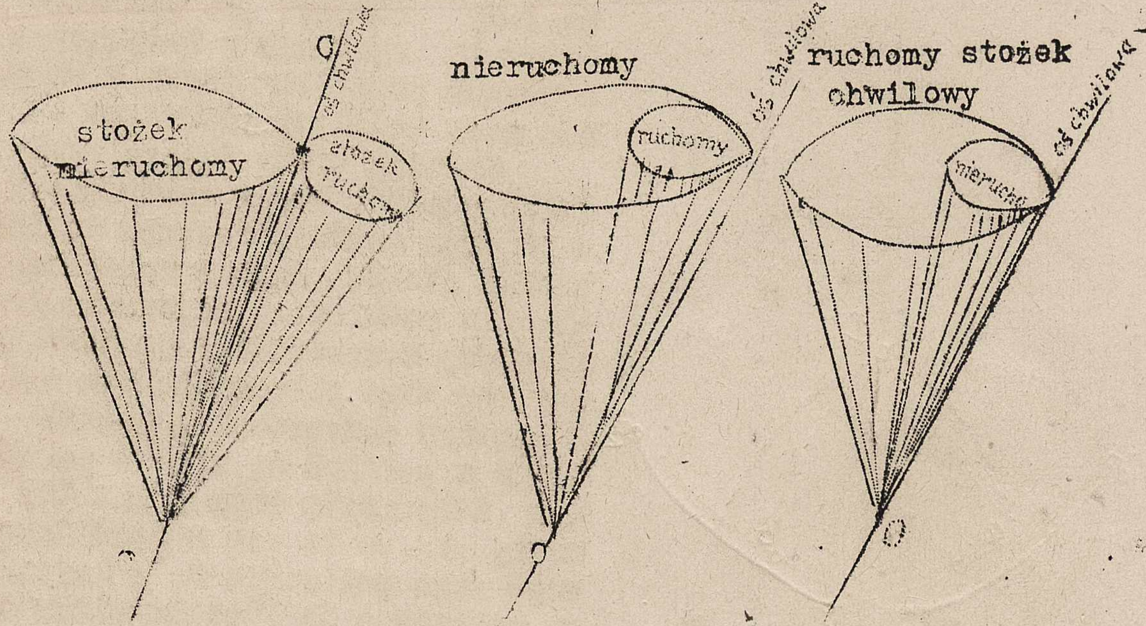


Rys.43.

Rozważaniami, ana logicznymi do rozważań następujących po dowodzie twierdzenia Bernoulli-Chsles'a dla ruchu płaskiego, udowodnimy, że ruch o b r o t o w y b r y ł y m a t e r i a l n e j d o o k o ł a n i e r u c h o m e g o p u n k t u, j e s t z ł o ż o n y z n i e s k o ń c z e n i e w i e l k i e j l i c z b y, n i e s k o ń c z e n i e m a ł y c h o b r o t ó w d o o k o ł a o s i, p r z e c h o d z ą c y c h p r z e z p u n k t n i e r u c h o m y. Należy nadmienić, że osie obrotu w różnych momentach czasu w ogólności będą różne.

Oś nieskończenie małego obrotu, odpowiadająca pewnemu momentowi czasu, nazywamy c h w i l o w ą o s i ą o b r o t u

tego momentu czasu na powierzchnię stożkową, utworzoną przez zespół osi chwilowych, nazywamy s t o ż k i e m o s i c h w i l o w y c h o b r o t ó w. Jeden stożek zakreślony w przestrzeni, jest to stały czyli nieruchomy stożek osi chwilowych, drugi stożek zakreślony w samej bryle materialnej, jest to r u c h o m y s t o ż e k o s i c h w i l o w y c h /rys.44./ W każdym momencie czasu, oba te stożki posiada ją wspólną tworzącą, która jest właśnie chwilową osią obrotu tego momentu czasu. Gdy bryła materialna obraca się dookoła nieruchomego punktu O, w t e d y r u c h o -



Rys.44.

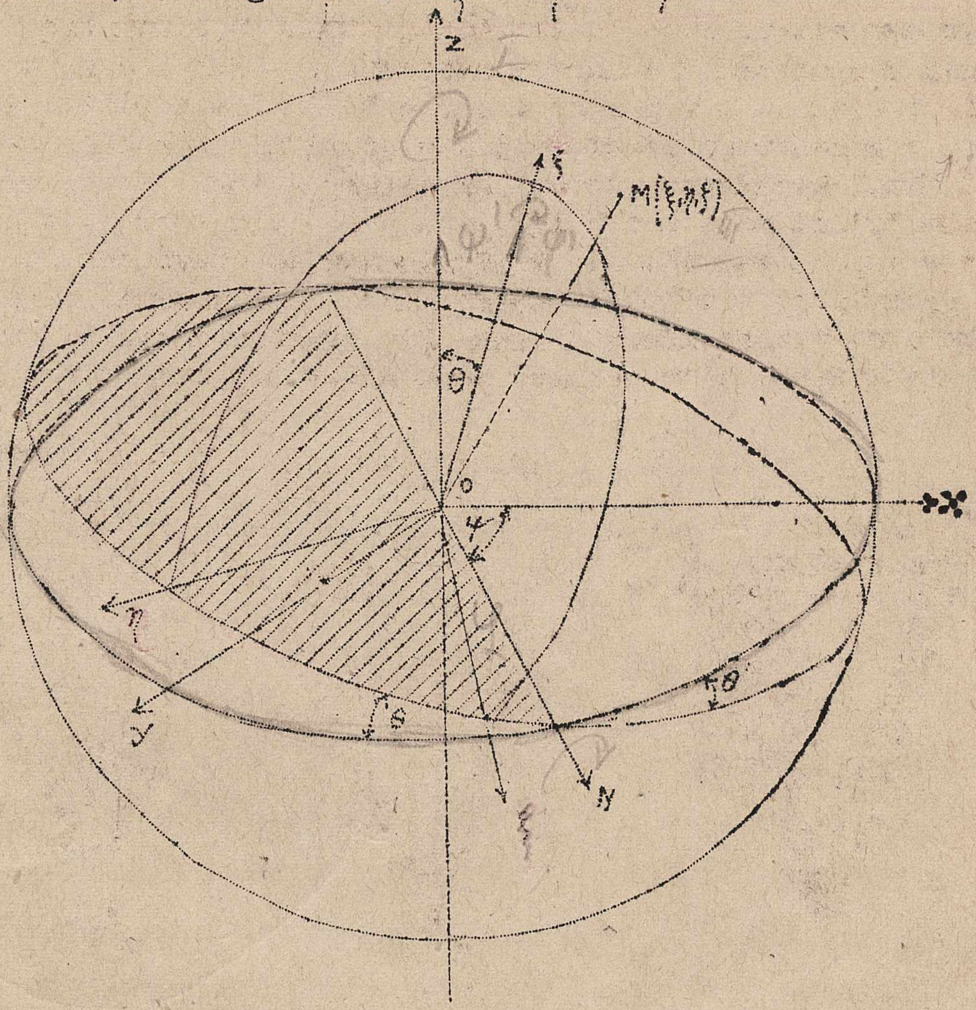
my s t o ż e k o s i c h w i l o w y c h, t o c z y s i ę b e z ś l i z g a n i a s i ę p o n i e r u c h o m y m s t o ż k u o s i c h w i l o w y c h.

Chwilową oś w danym momencie czasu wyznaczymy, gdy oprócz nieruchomego punktu bryły będzie nam znany jeszcze inny punkt, prędkość którego w rozpatrywanej chwili jest równa zeru.

Prędkości i przyspieszenia punktów bryły materialnej obracającej się dookoła nieruchomego punktu, w każdym momencie czasu są prędkościami i przyspieszeniami ruchu obrotowego dookoła pewnej chwilowej osi nieruchomej.

Rozpatrzymy teraz ruch obrotowy bryły materialnej dookoła nieruchomego punktu metodą analityczną, gdyż dotychczas badaliśmy ten ruch geometrycznie. Bierzemy dwa układy prostokątnych osi współrzędnych Kartezjusza, posiadających wspó-

lny początek O; jeden układ osi OX, OY, OZ, nieruchomy w przestrzeni, a drugi układ $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, niezmiennie



Rys. 45.

połączony z bryłą materilną/rys. 45/

Położenie osi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, względem osi OX, OY, i OZ określają 9 cosinusów kątów, utworzonych kierunkiem każdej osi układu $O\xi\eta\zeta$ z każdą osią układu OXYZ. Te cosinusy są określone następującą tabliczką:

(39)

	$O\xi$	$O\eta$	$O\zeta$
OX	a_1	b_1	c_1
OY	a_2	b_2	c_2
OZ	a_3	b_3	c_3

$$\cos /\xi, X/ = \cos /X, \xi/ = a_1$$

$$\cos /\xi, Y/ = \cos /Y, \xi/ = a_2 \text{ i.t.d.}$$

Oznaczając przez /x,y,z,/ i /$\xi\eta\zeta$/ współrzędne dowolnego punktu M odniesione do układów osi OXYZ i $O\xi\eta\zeta$, będziemy

my mieli wzory znane z geometrii analitycznej, wyrażające zależność pomiędzy /x,y,z/ i /ξ, η, ζ/:

$$x = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta$$
$$y = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /40/$$
$$z = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta$$

Ponieważ układ osi OYXZ jest prostokątnym, więc zachodzą następujące zależności pomiędzy 9-ciu cosinusami tabliczki 39.

$$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} = 1$$
$$b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /41/$$
$$c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2} = 1$$

Podobnież z powodu prostokątności osi $O\xi\eta\zeta$ mamy, że

$$a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + c_1^{\,2} = 1$$
$$a_2^{\,2} + b_2^{\,2} + c_2^{\,2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /42/$$
$$a_3^{\,2} + b_3^{\,2} + c_3^{\,2} = 1$$

Oczywiście $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2\,\zeta^2$,

skąd $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = /a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta/^2 + /a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta/^2 + /a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta/^2$,

po skasowaniu nawiasów, korzystając z wzorów /41/ znajdziemy:

$$/a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3/\xi\eta + /b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3/\eta\zeta + /a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3/\xi\zeta = 0$$

Ponieważ ta równość musi być ważną dla dowolnych wartości ξ, η, ζ, więc z niej wynikają następujące tożsampści:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$
$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /43/$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$

Te wzory wyrażają zależności pomiędzy cosinusami kątów utworzonych przez dwa wzajemnie prostopadłe kierunki z prostokątnymi osiami współrzędnych.

Stąd wynikają i takie zależności:

$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0$$
$$a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /44/$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Jest rzeczą oczywistą, że równości /41/ i /43/ są równoważne równościom /42/ i /44/. Łatwo przekonamy się, że zależności 6 /41/ i /43/ są niezależnymi, t.j. biorąc

dowolnie trzy wielkości tabliczki /39/ ,pozostałe wyznaczymy przez te trzy za pomocą sześciu równań /41/ i /43/.

Zamiast tych trzech cosinusów,lub trzech kątów im odpowiadających,możemy wziąć jakiekolwiek trzy inne zmienne niezależne,przez które trzy pierwsze możnaby było wyrazić. Tak właśnie uczynił E u l e r ,wprowadzając trzy nowe , wzajemnie niezależne kąty θ, φ i ψ ,zwane k ą t a m i E u l e r a.

Wyobraźmy sibie kulę o dowolnym promieniu,mającą środek w początku współrzędnych O /rys.45/.Dowolna płaszczyzna poprowadzona przez punkt O ,przetnie powierzchnię tej kuli według w i e l k i e g o k o ł a ,a dowolna prosta ,przeprowadzona przez początek O w jednym kierunku przetnie powierzchnię kuli w j e d n y m tylko punkcie,więc każdemu kierunkowi w przestrzeni odpowiada jeden i tylko jeden punkt na powierzchni naszej kuli.Osi współrzędnych OXYZ i O$\xi\eta\zeta$ przetną ową kulę w sześciu punktach X,Y,Z,ξ,η,ζ,a płaszczyzny współrzędnych,przetną powierzchnię tej kuli według łuków wielkich kół $\xi\eta$,$\eta\zeta$,$\xi\zeta$,XY,YZ ,XZ.

Zanotujemy prostą przecięcia się płaszczyzn współrzędnych XOY i O niech będzie prosta ON.Położenie tej prostej na płaszczyźnie XOY będzie określone,gdy weźmiemy kąt ψ=XON, przyczym ten kąt liczymy od dodatniej połowy osi OX w stronę dodatniej połowy osi OY,t.j. według obrotu strzałki zegara ,od O do 2π.

Położenie płaszczyzny ξOη będzie określone,gdy weźmiemy kąt bryłowy przy prostej ON,utworzony płaszczyznami XOY ξOη .Na powierzchni kuli,temuż kątowi bryłowemu odpowiada kąt sferyczny θ,mający wierzchołek w punkcie N i utworzony łukami wielkich kół $\xi\eta$ i XY,oczywiście wtedy kąt pomiędzy osiami OZ i Oζ jest też równy θ.Ten kąt θ liczymy od osi OZ ku osi Oζ ,czyli od płaszczyzny XOY ku płaszczyźnie ξOη , od O do 2π .

Wreszcie położenie osi Oξ na płaszczyźnie ξOη będzie określone,gdy weźmiemy kąt NOξ = φ ,który liczymy od prostej ON w kierunku strzałki zegara w stronę osi ξ ,wtedy kąt NOη będzie równy $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Jak widzimy,te trzy kąty E u l e r'a w zupełności określają wzajemne położenie osi współrzędnych OXYZ i O$\xi\eta\zeta$.

Aby wyrazić 9 cosinusów tablicy /39/ przez kąty E u l e r'a θ φ i ψ,będziemy stopniowo przekształcać osie nieruchome OYXZ.

1/ Wyobraźmy sobie,że układ osi OXYZ jest obrócony o kąt ψ dookoła osi OZ, wtedy oś OX zajmie położenie ON;

wprowadzimy dlatego p o m o c n i c z y u k ł a d w s p ó ł r z ę d n y c h $OX_1 y_1 Z_1$, przy czym oś OX_1 jest zgodną z prostą ON, wtedy na zasadzie znanych wzorów przekształcenia współrzędnych na płaszczyźnie, będziemy mieli:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi \\
y &= x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi \qquad \text{/45/} \\
z &= z_1
\end{aligned}
$$

2/ Następnie przypuśćmy, że układ $OX_1 Y_1 Z_1$ obróciliśmy dookoła osi OX_1, t.j. dookoła prostej ON, o kąt θ; wtedy współrzędna x_1 pozostanie bez zmiany, a współrzędne z_1 i y_1 ulegną zmianie. Te n o w e p o ł o ż e n i e u k ł a d u $OX_1 y_1 Z_1$ nazwiemy przez $OX_2Y_2Z_2$; wzory przekształcenia będą:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 \\
y_1 &= y_2 \cos\theta - z_2 \sin\theta \qquad \text{/46/} \\
z_1 &= y_2 \sin\theta + z_2 \cos\theta
\end{aligned}
$$

Jest rzeczą oczywistą, że oś OZ_2 jest zgodną z osią $O\zeta$.

3/ Teraz obrócimy układ $OX_2Y_2Z_2$ dookoła osi $O\zeta$ t.j. osi OZ_2 o kąt φ; wtedy u k ł a d s t a n i e s i ę z g o d n y m z u k ł a d e m $O\xi\eta\zeta$, a wzory przekształcenia współrzędnych x_2, y_2, z_2, we współrzędne ξ, η, ζ, będą:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi \\
y_2 &= \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi \qquad \text{/47/} \\
z_2 &= \zeta
\end{aligned}
$$

Eliminując z wzorów /45/, /46/ i /47/ $x_2, y_2, z_2, x_1, y_1, z_1$, znajdziemy, że:

$$
x = \xi(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - \eta(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + \zeta\sin\psi\sin\theta
$$

$$
y = \xi(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + \eta(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - \zeta\cos\psi\sin\theta
$$

$$
z = \xi\sin\varphi\sin\theta + \eta\cos\varphi\sin\theta + \zeta\cos\theta
$$

Porównując te wzory ze wzorami /40/, znajdziemy poszukiwane zależności :

W.J. Takliński - Mechanika teoretyczna.

$$a_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta$$
$$a_2 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta$$
$$a_3 = \sin\varphi\sin\theta$$
$$b_1 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots /48/$$
$$b_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta$$
$$b_3 = \cos\varphi\sin\theta$$
$$c_1 = \sin\psi\sin\theta$$
$$c_2 = -\cos\psi\sin\theta$$
$$c_3 = \cos\theta$$

Gdy bryła materialna obraca się dookoła nieruchomego punktu O, kąty E u l e r' a θ, φ i ψ zmieniają się z biegiem czasu i dlatego r ó w n a n i a r u c h u b r y ł y w tym wypadku będą :

$$\theta = \theta/t/, \; \varphi = \varphi/t/, \; \psi = \psi/t/ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /49/.$$

Równania krzywej, którą zakreśla punkt M / ξ, η, ζ / bryły materialnej w przestrzeni, otrzymamy z wzorów / 40/ nadając ξ, η i ζ wielkości stałe, a następnie eliminując czas t, który wchodzi przez θ, φ i ψ w wyrażenia cosinusów $a_1, \ldots\ldots c_3$; otrzymamy dwa równania między x,y,z, będą oczywiście przedstawiały pewną sferyczną krzywą, położoną na powierzchni kuli.

Aby znaleźć równanie krzywej, którą dany nieruchomy punkt przestrzeni M /x,y,z/ wykreśla wewnątrz pruszającej się bryły, nadajemy w równaniach / 40 / x,y,i z wielkości stałe i znowu eliminujemy czas t. Wtedy oczywiście otrzymamy te same z wyglądu równania, jakie wyżej znaleźliśmy dla toru punktu M/ ξ, η, ζ /, ale zmiennemi w nich będą ξ, η, ζ, a x,y,z, stałemi. Tę krzywą moglibyśmy wyznaczyć, korzystając równań /49/ wyrażających współrzędne ruchome przez współrzędne nieruchome:

$$\xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$
$$\eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots / 49/$$
$$\zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Eliminując z tych równań czas t, otrzymamy równania poszukiwanej krzywej .

Zbadamy prędkości punktów bryły materialnej, obracającej się dookoła nieruchomego punktu. Różniczkując wzory /40/ względem czasu t, znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty

prędkości w punktu M /x,y,z/ bryły materialnej:

$$v\cos(v,X) = x' = a'_1\xi + b'_1\eta + c'_1\zeta$$
$$v\cos(v,Y) = y' = a'_2\xi + b'_2\eta + c'_2\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /50/$$
$$v\cos(v,Z) = z' = a'_3\xi + b'_3\eta + c'_3\zeta$$

przy czym $a'_1 = \frac{da_1}{dt}$, $b'_1 = \frac{db_1}{dt}$, $c'_1 = \frac{dc_1}{dt}$, $a'_2 = \frac{da_2}{dt}$, ...

Przekształcimy wzory /50/ wstawiając w nie zamiast ξ, η, ζ, ich wyrażenia /49/, wtedy otrzymamy:

$$x' = x(a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1) + y(a_2a'_1 + b_2b'_1 + c_2c'_1) + z(a_3a'_1 + b_3b'_1 + c_3c'_1),$$

$$y' = x(a_1a'_2 + b_1b'_2 + c_1c'_2) + y(a_2a'_2 + b_2b'_2 + c_2c'_2) + z(a_3a'_2 + b_3b'_2 .$$

$$z' = x(a_1a'_3 + b_1b'_3 + c_1c'_3) + y(a_2a'_3 + b_2b'_3 + c_2c'_3) + z(a_3a'_3 + b_3b'_3 + c_3c'_3),$$

Zauważymy, że współczynnik przy x w pierwszym z tych wzorów, przy y, w drugim i przy trzecim są równe zeru w samej rzeczy, różniczkując wzory /42/ i skracając przez 2, znajdziemy, iż

$$a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1 = 0$$
$$a_2a'_2 + b_2b'_2 + c_2c'_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /51/$$
$$a_3a'_3 + b_3b'_3 + c_3c'_3 = 0$$

Różniczkując wzory /41/ względem czasu, znajdziemy że

$$a_2a'_3 + b_2b'_3 + c_2c'_3 = -(a_3a'_2 + b_3b'_2 + c_3c'_2)$$
$$a_3a'_1 + b_3b'_1 + c_3c'_1 = -(a_1a'_3 + b_1b'_3 + c_1c'_3) \quad \ldots /52/$$
$$a_1a'_2 + b_1b'_2 + c_1c'_2 = -(a_2a'_1 + b_2b'_1 + c_2c'_1)$$

Oznaczając lewe części równości /52/ odpowiednio przez P, Q i R t.j.

$$P = a_2a'_3 + b_2b'_3 + c_2c'_3$$
$$Q = a_3a'_1 + b_3b'_1 + c_3c'_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /53/$$
$$R = a_1a'_2 + b_1b'_2 + c_1c'_2$$

i opierając się na wzorach /51/ i /52/, znajdziemy następujące wyrażenia na rzuty prędkości v

$$v\cos(v,X) = x' = zQ - yR$$
$$v\cos(v,Y) = y' = xR - zP \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /54/$$
$$v\cos(v,Z) = z' = yP - xQ$$

Wzory /54/ często są nazywane wzorami E u l e r' a.
Współrzędne punktu /x,y,z/, którego prędkość w danym momencie czasu jest zerem, muszą czynić za dość następującym warunkom:

$$zQ - yR = 0,\quad xR - zP = 0,\quad yP - xQ = 0$$

czyli

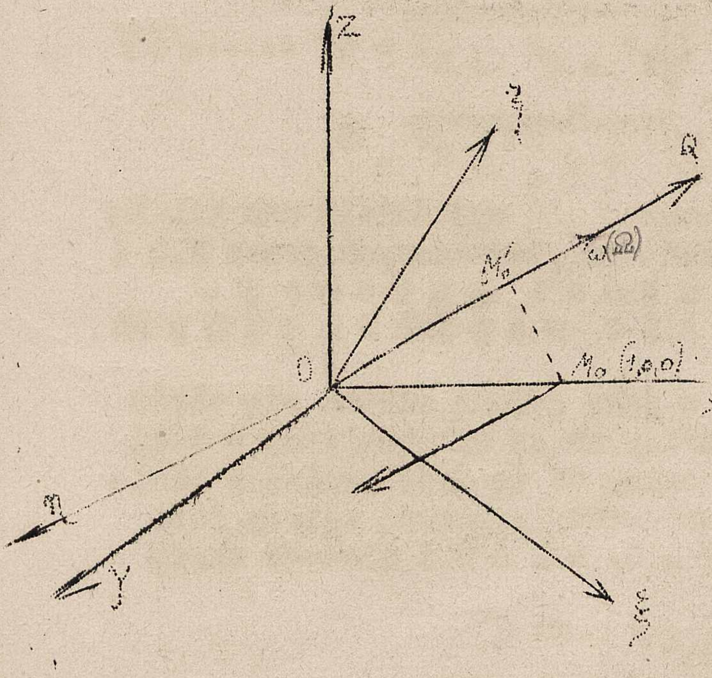
$$\frac{y}{Q} = \frac{z}{R};\ \frac{x}{P} = \frac{z}{R};\ \frac{y}{Q} = \frac{x}{P}$$

Ponieważ jedno z tych trzech równań jest wnioskiem dwóch innych, więc mamy dwa równania z trzema niewiadomymi x,y,z :

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} \quad \text{/55/}$$

Z równań /55/ wynika, że współrzędne punktu /x,y,z/, którego prędkość w danym momencie czasu t jest równa zeru, są związane równaniami pierwszego stopnia; a zatym istnieje nieskończenie wiele punktów, których prędkość w danej chwili t jest zerem, wszystkie te punkty są położone na jednej i tej samej prostej, przechodzącej przez początek współrzędnych O i wyrażającej się za pomocą równań /55/. Gdy zmiennej t nadamy określoną wartość, wtedy P, Q i R przybiorą też pewne wartości stałe, a więc równania /55/ przedstawią nam zupełnie określoną prostą; jest rzeczą oczywistą, że ta prosta jest c h w i l o w ą o s i ą o b r o t u bryły materialnej danego momentu czasu t. Chwilowa oś obrotu z biegiem czasu zmienia swe położenie w przestrzeni, albowiem P, Q i R są funkcjami czasu t.

Oznaczymy przez OΩ kierunku chwilowej osi obrotu /rys.46/.



Rys.46.

Na podstawie wzorów /55/, kierunek OΩ wyznaczymy ze wzorów:

$$\cos(O\Omega, x) = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

$$\cos(O\Omega, y) = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \quad \text{/56/}$$

$$\cos(O\Omega, z) = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

Wiemy, że prędkość kątowa z jaką bryła obraca się dookoła osi chwilowej O jest równą ilorazowi prędkości liniowej jakiegokolwiek punktu bryły i najkrótszej odległości tego punktu od chwilowej osi obrotu. Weźmiemy ten punkt bryły materialnej M_0, który w danym momencie czasu znajduje się

na osi nieruchomej OX w odległości od początku współrzęd O rów nej jedności długości. Wtedy współrzędne punktu M_o będą $x = 1,\ y = z_o = 0$, a najkrótsza odległość $M_oM'_o$ tego punktu od osi $O\Omega$ wyrazi się następująco:

$$M_oM'_o = M_oO\ \sin/M_oOM'_o/ = 1\cdot\sqrt{1-\cos^2/OM_o,X/} = \sqrt{\frac{Q^2+R^2}{P^2+Q^2+R^2}};$$

Wzory /54/ dają nam następujące wyrażenia na rzuty prędkości M_o

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},x/ = 0$$

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},y/ = xR = R$$

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},z/ = -xQ = -Q,$$

Stąd znajdziemy wielkość :

$$\omega = \frac{V_{M_o}}{M_oM'_o} = \sqrt{P^2+Q^2+R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /57/$$

Za tym prędkość kątowa obrotu chwilowego w ogólności jest funkcją czasu t. Prędkość chwilowego obrotu ω przedstawimy geometrycznie za pomocą wektora /patrz rozdział IV/ skierowanego wzdłuż chwilowej osi obrotu $O\Omega$; możemy więc rzutować wektor prędkości kątowej na osie współrzędnych OXYZ; wtedy otrzymamy wzory:

$$\omega\cdot\cos/\omega,x/ = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = P$$

$$\omega\cdot\cos/\omega,y/ = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\ \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = Q \quad \ldots\ldots /58/$$

$$\omega\cdot\cos/\omega,z/ = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\ \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} = R$$

Ostatnie otrzymane równania /58/ wyjaśniają nam kinematyczną interpretację wyrażeń /53/, oznaczonych przez P, Q i R są rzutami prędkości kątowej ω na nieruchome osie współrzędnych OX, OY, i OZ.

Musimy jeszcze wskazać w jaką stronę odbywa się obrót dookoła chwilowej osi. Przypuśćmy, że oś OZ obraliśmy w taki sposób, że w pewnym momencie czasu oś ta jest zgodną z chwilową osią obrotu $O\Omega$; ponieważ wtedy prędkość kątowa jest skierowana wzdłuż OZ, więc $P = Q$, a $R \neq 0$ i dlatego wzory /54/ dają nam że:

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},x/ = 0'$$

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},y/ = xR = R'$$

$$V_{M_o}\cdot\cos/V_{M_o},z/ = 0;$$

Skąd wnioskujemy, że prędkość v_{M_0} jest skierowana równolegle do osi w stronę dodatnią tej osi. A zatym obrót dookoła chwilowej osi odbywa się o d s t r o n y l e w e j k u p r a w e j, gdy patrzący ma prędkość skierowaną od nóg ku głowie.

Równanie n i e r u c h o m e g o s t o ż k a c h w i l o w y c h o s i o b r o t u, otrzymamy z równań /55/, eliminując z nich czas t.

Aby wyznaczyć równanie r u c h o m e g o s t o ż k a c h w i l o w y c h o s i o b r o t u, musimy znaleść rzuty prędkości kątowej na ruchome osie współrzędnych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, niezmiennie z bryłą związane; więc mamy:

$$\left.\begin{aligned} \omega \cdot \cos/\omega,\xi/ &= p = a_1P + a_2Q + a_3R \\ \omega \cdot \cos/\omega,\eta/ &= q = b_1P + b_2Q + b_3R \\ \omega \cdot \cos/\omega,\zeta/ &= r = c_1P + c_2Q + c_3R \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots/59/$$

Wyznaczymy ze wzorów /59/ p, q i r będziemy mieli następujące równania osi chwilowej w współrzędnych ruchomych:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/60/$$

Eliminując z równań /60/ czas t, otrzymamy równanie ruchomego stożka osi chwilowych:

$$f/\xi,\eta,\zeta/ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/60a/$$

Rzuty prędkości v jakiegokolwiek punktu $M/\xi,\eta,\zeta/$ bryły materialnej na ruchome osie $O\xi\eta\zeta$ wyrażają się wzorami analogicznymi do wzorów /54/, mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} v\cos/v,\xi/ &= \zeta q - \eta r, \\ v\cos/v,\eta/ &= \xi r - \zeta p, \\ v\cos/v,\zeta/ &= \eta p - \xi q. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots/61/$$

P r z y k ł a d. Bryła materialna obraca się dookoła osi $O\zeta$ jednostajnie z prędkością kątową $\omega = a$, oś zaś $O\zeta$ jednocześnie obraca się dookoła osi OZ z prędkością kątową $\omega = b$, pozostając do niej stale prostopadłą. W momencie początkowym $t = 0$, oś $O\zeta$ znajduje się na płaszczyźnie XOZ. Równania ruchu /49/ przybierają postać następującą:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = at, \quad \psi = \frac{\pi}{2} + bt$$

Z równań /48/ otrzymamy wyrażenia na cosinusów $a_1, \ldots c_3$

$$a_1 = -\cos at \sin bt, \quad a_2 = \cos at \cos bt, \quad a_3 = \sin at,$$

$$b_1 = \sin at \sin bt, \quad b_2 = -\sin at \cos bt, \quad b_3 = \cos at,$$

$$c_1 = \cos bt, \quad c_2 = \sin bt, \quad c_3 = 0;$$

Rzuty prędkości kątowej ω na nieruchome osie s[?] :

$$P = a\cos bt,\ Q = a\sin bt,\ R = b,$$

skąd wynika, że $\omega = \sqrt{a^2 + b^2}$, a zatym równanie /55/ chwilowej osi obrotu we współrzędnych nieruchomych napiszemy tak:

$$\frac{x}{a\cos bt} = \frac{y}{a\sin bt} = \frac{z}{b}$$

Nieruchomy stożek chwilowych osi obrotu jest stożek obrotow y, którego oś jest prostą OZ;

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot z^2 = 0.$$

Wzory /59/ dają nam:

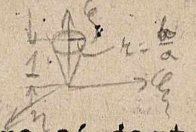
$$p = b\sin at,\quad q = b\cos at,\quad r = a.$$

Równanie chwilowej osi obrotu we współrzędnych ruchomych będzie:

$$\frac{\xi}{b\sin at} = \frac{\eta}{b\cos at} = \frac{\zeta}{a}$$

Skąd znajdujemy równania ruchomego stożka chwilowych osi obrotu:

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{b^2}{a^2}\zeta^2 = 0$$



jest więc nim stożek obrotowy, którego oś jest zgodną z osią $O\zeta$.

& . O g ó l n y p r z y p a d e k r u c h u b r y ł y m a t e r i a l n e j.

W iemy, że położenie bryły materialnej jest w zupełności określone, gdy znamy położenia trzech jej punktów nie leżących na jednej prostej.

Twierdzenie. W o g ó l n y m p r z y p a d k u r u c h u b r y ł y m a t e r i a l n e j k a ż d e j e j p o ł o ż e n i e m o ż e b y ć o t r z y m a n e z j a k i e g o k o l w i e k i n n e g o p o ł o ż e n i a t e j b r y ł y z a p o m o c ą d w ó c h p r z e s u n i ę ć: p r z s u n i ę c i a p o s t ę p o w e g o , p r o s t o l i n i o w e g o i p r z e s u n i ę c i a o b r o t o w e g o d o o k o ł a p e w n e j o s i.

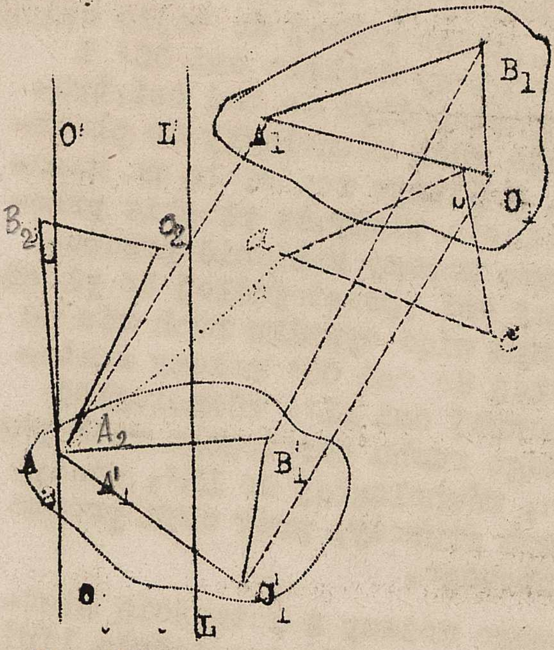
Niechaj /rys.47 / A_1, B_1, C_1 będą początkowe położenia trzech punktów bryły materialnej , A_2, B_2, i C_2 końcowe położenia tych samych punktów, wtedy oczywiście

$$A_1B_1 = A_2B_2,$$
$$A_1C_1 = A_2C_2,$$
$$B_1C_1 = B_2C_2.$$

Przesuniemy bryłę materialną z początkowego położenia A_1, B_1, C_1, ruchem p o s t ę p o w y m i p r o s t o l i n i o w y m w t a k ... nowe położenie A'_1, B'_1, C'_1, aby np. punkt A'_1 stał się zgodnym z punktem A_2 bryły w położeniu końcowym. Wtedy oczywiście

$A_1A'_1 \# B_1B'_1 \# C_1C'_1$

i punkty A_1, B_1, i C_1 przesuną się wzdłuż prostych $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ i $C_1C'_1$, w położenia A'_1, B'_1 i C'_1. Z przedniego - fu wiemy, że na zasadzie twierdzenia d'A la mbert-Euler'a, możemy obrócić bryłę materialną dookoła pewnej osi OO', przechodzącej przez nieruchomy punkt $A'_1/A_2/$, o taki kąt, ażeby dwa punkty B'_1 i C'_1, zajęły położenia B_2 i C_2. Wypełniając to przesunięcia obrotowo dookoła pewnej osi OO' przeprowadzimy bryłę w położenie A_2, B_2, i C_2. c.b.d.o.



Rys.47.

Ruch bryły materialnej, składający się z ruchu obrotowego dookoła pewnej osi i ruchu postępowego w kierunku tej osi nazywamy r u c h e m ś r u b o w y m. Oś obrotu w tym wypadku nazywamy o s i ą r u c h u ś r u b o w e g o czyli o s i ą o b r o t u i p o s t ę p u. Przykładem takiego ruchu jest powszechnie znany ruch gwintu śrubowego w jego nieruchomym naśrubku, albo odwrotnie ruch naśrubka na nieruchomym gwincie śrubowym. Udowodnimy następujące twierdzenie M o ż z i' e g o, dotyczące ruchu śrubowego.

Twierdzenie Możzi'ego. W o g ó l n y m w y p a d k u r u c h u b r y ł y m a t e r i a l n e j k a ż d e j e j p o ł o ż e n i e m o ż e b y ć o t r z y m a n e z j a k i e g o k o l w i e k i n n e g o j e j p o ł o ż e n i a z a p o m o c ą p r z e s u n i ę c i a r u c h e m ś r u b o w y m d o o k o ł a p e w n e j o s i r u c h u ś r u b o w e g o.

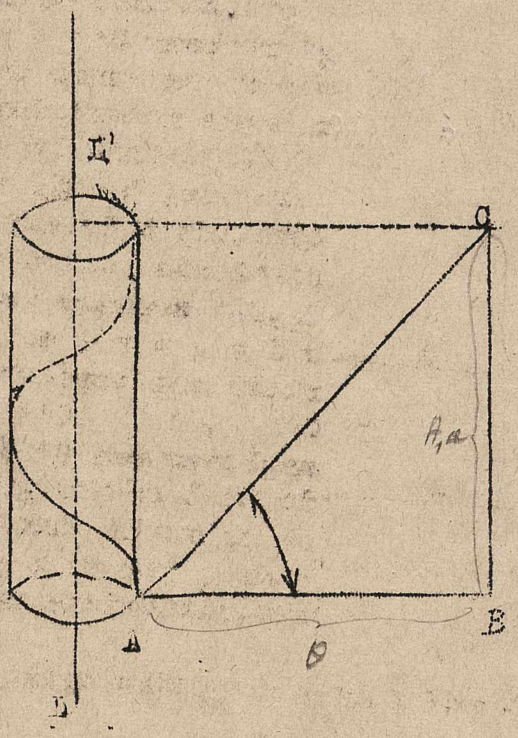
Musimy dowieść, że ruch postępowy w kierunku prostej A_1A_2 /Rys.47/ i ruch obrotowy dookoła osi OO' mogą być za-

tąpione ruchem śrubowym dookoła pewnej osi śrubowej.
W tym celu rozłożymy ruch postępowy w kierunku prostej A_1A_2 na dwa ruchy postępowe, mianowicie : ruch postępowy w kierunku prostej A_1a, równoległej do osi OO' i na ruch postępowy w kierunku prostej aA_2, prostopadłej do tejże osi OO'. Jest rzeczą oczywistą, że ruch obrotowy dookoła osi OO' i ruch postępowy w kierunku aA_2, prostopadłym do tej osi, tworzą razem ruch płaski, mianowicie ruch równoległy do płaszczyzny, prostopadłej do osi OO'. Z §3 tego rozdziału na zasadzie twierdzenia Bernoulli-Chasles'a wiemy, że płaskie przesunięcie bryły materialnej zawsze możemy zamienić przesunięciem obrotowym dookoła pewnej osi, prostopadłej do płaszczyzny ruchu płaskiego. W obecnym więc wypadku ruch równoległy do płaszczyzny prostopadłej do osi OO' możemy zamienić ruchem obrotowym dookoła pewnej osi LL', równoległej do osi OO'. Gdy dołączymy do tego ruchu obrotowego ruch postępowy w kierunku prostej A_1a, równoległej do LL', wtedy według definicji, otrzymamy ruch śrubowy, przy czym prosta LL' będzie osią tego ruchu śrubowego.

Dla każdego ruchu śrubowego możemy z łatwością stworzyć odpowiednią linię śrubową; weźmiemy walec obrotowy, oś którego jest prostą LL', a promień którego jest równy jedności długości /rys.48/. Oznaczymy przez θ kąt, wyrażony w mierze łukowej, jaki bryła materialna obróciła się dookoła osi śrubowej obrotu LL'. Nawińmy na walec trójkąt prostokątny ABC, kąt którego BAC określa się z równania :

$$tg/BAC/ = \frac{A_1a}{\theta},$$

wtedy przeciwprostokątna AC po nawinięciu się na walec utworzy na nim szukaną linię śrubową.



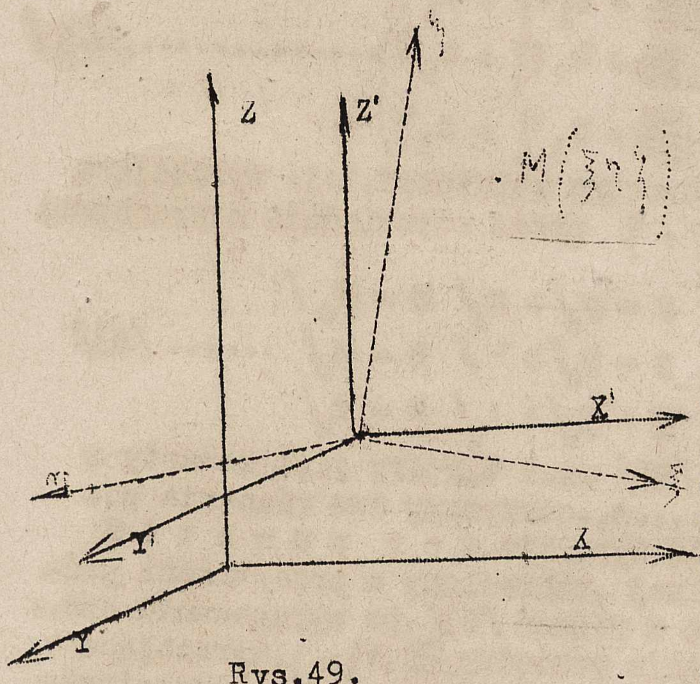
Rys.48.

Twierdzenie Mozzi'ego pozostaje słusznem i wtedy, gdy przesunięcie bryły materialnej będzie nieskończenie małe.
Ruch więc bryły materialnej w ogólnym wypadku możemy u wa-

żacja ku granicę szeregu kolejnych ruchów śrubowych ,przy czym oś śrubowa obrotu ciągle zmienia swe położenie w przestrzeni i wewnątrz bryły materialnej. Tę oś nazywamy chwilową osią ruchu śrubowego ,czyli chwilową osią obrotu i postępu. Podczas ruchu bryły ,oś ta zakreśla dwie liniowe powierzchnie: jedną w przestrzeni ,a drugą wewnątrz samej bryły ruchomej; te powierzchnie liniowe nazywamy odpowiednio nieruchomą i ruchomą powierzchnią chwilowych osi ruchu śrubowego.

Przykładem nieruchomej i ruchomej powierzchni chwilowych osi ruchu śrubowego mogą być dwie jednopowłokowe hiperpolojdy. W każdym momencie czasu t obie hiperpolojdy posiadają oczywiście wspólną tworzącą, która jest właśnie chwilową osią ruchu śrubowego dla rozpatrywanego momentu czasu t; oprócz tego ta tworząca, jest kierunkiem ruchu postępowego w tym momencie t. Zatym podczas ruchu bryły, ruchoma powierzchnia chwilowych osi ruchu śrubowego i zarazem przesuwa się postępowo wzdłuż wspólnej tworzącej.

Zbadamy obecnie ruch śrubowy analitycznie. W tym celu weźmiemy dwa układy osi współrzędnych: Jeden układ nieruchomy w przestrzeni OXYZ, a drugi ruchomy O'ξηζ , ale niezmiennie związany z bryłą materialną /rys. 49./ Położenie bryły materialnej będzie określone, gdy będziemy znali położenie punktu O' /X_0, Y_0, Z_0/ zwanego zwykle biegunem i kierunki osi współrzędnych O'ξ ,O'η ,O'ζ względem osi O' X' Y' Z' do nich równoległych. Te kierunki określimy tak samo , jak w § poprzednim, mianowicie za pomocą kątów Euler'a θ ,ψ i φ .



Rys.49.

Zatym ruch bryły materialnej w wypadku ogólnym określają sześć wielkości

$$X_0 \ , \ Y_0 \ , Z_0 \ , \theta \ , \psi \text{ i } \varphi ,$$

a więc skończone równania ruchu będą:

$$X_0 = f_1/t/, \quad y_0 = f_2/t/ , \quad z_0 = f_3/t/$$

$$\theta = \theta/t/,\ \varphi = \varphi/t/,\ \psi = \psi/t/ \ldots\ldots\ldots /61/$$

Szczególne wypadki ruchu bryły materialnej, wyłożone w § 1 - 4 tego rozdziału, możemy rozpatrywać jak szególne wypadki ruchu, przedstawionego zapomocą równań /61/;

W samej rzeczy dla ruchu postępowego będziemy mieli:

$$\theta/t/ = 0,\ \varphi/t/ = 0,\ \psi/t/ = 0;$$

dla ruchu obrotowego dookoła osi nieruchomej, np. dookoła osi OZ:

$$f_1/t/ = 0,\ f_2/t/ = 0,\ f_3/t/ = 0,\ \theta/t/ = 0,\ \psi/t/ = 0;$$

dla płaskiego ruchu, równolegle np. do nieruchomej płaszczyzny XOY:

$$f_3/t/ = 0,\ \theta/t/ = 0,\ \psi/t/ = 0;$$

dla ruchu obrotowego dookoła nieruchomego punktu, np. punktu O:

$$f_1/t/ = 0,\ f_3/t/ = 0.$$

Wzory wyrażające związek pomiędzy współrzędnemi punktu M nieruchomemi i ruchomemi są:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ y &= y_0 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \\ z &= z_0 + a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots /62/$$

Wzory wyrażające odwrotną zależność, t.j. wyrażające ruchome współrzędne ξ, η, ζ przez odpowiednie nieruchome są:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1/x - x_0/ + a_2/y - y_0/ + a_3/z - z_0/ \\ \eta &= b_1/x - x_0/ + b_2/y - y_0/ + b_3/z - z_0/ \quad \ldots\ldots /63/ \\ \zeta &= c_1/x - x_0/ + c_2/y - y_0/ + c_3/z - z_0/ \end{aligned}$$

Eliminując z równań /62/ czas t, który jest zawarty w funkcjach $x_0, y_0, z_0, a_1, \ldots\ldots c_3$, otrzymamy dwa równania pomiędzy x, y i z; te równania wyrażają tor punktu M $/\xi, \eta, \zeta/$ bryły materialnej, zakreślony w przestrzeni podczas ruchu bryły. Podobnie z równań /63/, po wyrugowaniu czasu t, znajdziemy dwa równania pomiędzy ξ, η, ζ, wyrażające tor, zakreślony przez nieruchomy punkt /x, y, z/ w przestrzeni wewnątrz samej bryły.

Różniczkując wzory /62/, znajdziemy wyrażenia na rzuty prędkości punktu M $/\xi, \eta, \zeta/$ bryły:

$$\left.\begin{aligned} v\cos/v,X/ &= x' = x'_0 + a'_1\xi + b'_1\eta + c'_1\zeta \\ v\cos/v,Y/ &= y' = y'_0 + a'_2\xi + b'_2\eta + c'_2\zeta \\ v\cos/v,Z/ &= z' = z'_0 + a'_3\xi + b'_3\eta + c'_3\zeta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots /64/$$

przy czym
$$X_0' = \frac{dx_0}{dt}, \quad a_1' = \frac{da_1}{dt} \quad \text{i.t.d.}$$

Te wzory pozwalają nam obliczyć wielkość i kierunek prędkości v dowolnego punktu M bryły; pierwsze wyrazy we wzorach /64/, mianowicie x_0', y_0', i z_0' są oczywiście rzutami na nieruchome osie prędkości b i e g u n a O' /x_0, y_0, z_0/ pozostałe trójmiany wyrażają rzuty na te same osie prędkości punktu M /ξ, η, ζ/, którą ten punkt posiadałby, gdyby biegun O' był nieruchomym, a bryła materialna obracała się dookoła niego.

Więc wzory /64/ stwierdzają, że prędkość punktu M /ξ, η, ζ/ bryły materialnej w ogólnym wypadku ruchu jest s u m ą g e o m e t r y c z n ą p r ę d k o ś c i v v_0 b i e g u n a i p r ę d k o ś c i v_1 o b r o t u d o o k o ł a t e g o b i e g u n a, t.j.

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{v_1}$$

W staw imy we wzory /64/ wyrażenia /63/ na ξ, η, ζ wtedy oczywiście otrzymamy wzory, podobne do wzorów /54/ poprzedniego §4:

$$\begin{aligned} v\cos/v,X/ &= x_0' + /z - z_0/\,Q - /y-y_0/\,R \\ v\cos/v,Y/ &= y_0' + /x - x_0/\,R - /z-z_0/\,P \quad \ldots\ldots/65/ \\ v\cos/v,Z/ &= z_0' + /y - y_0/\,P - /x-x_0/\,Q \end{aligned}$$

przy czym P, Q i R wyrażają się wzorami /53/ §4.

Prędkość kątową ω obrotu dookoła osi chwilowej co do wielkości i kierunku obliczymy ze wzoru:

$$\omega = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

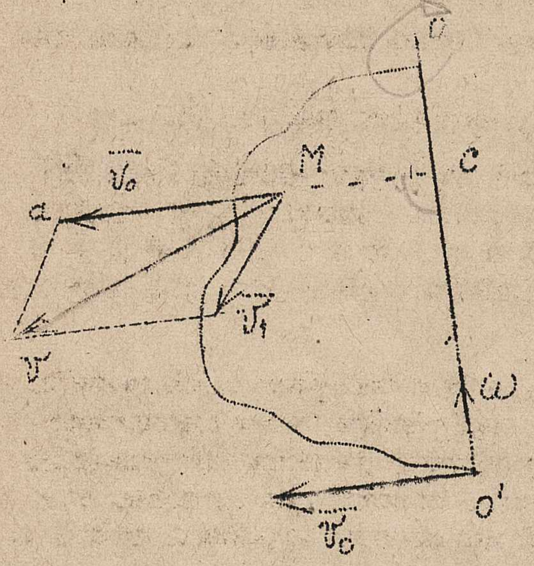
$$\cos/\omega, X/ = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \qquad \cos/\omega, Y/ = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

$$\cos/\omega, Z/ = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

Korzystając z tego, iż prędkość punktu M bryły materialnej w ogólnym wypadku ruchu jest sumą geometryczną prędkości bieguna O' i prędkości obrotu dookoła tego bieguna, możemy z łatwością wyrazić tę prędkość. Niech O' /rys.50 jest biegun, v_0 - jego prędkość, ω -prędkość kątowa obrotu dokoła chwilowej osi O'O. Przeprowadzimy z punktu M odcinek Ma geometrycznie równy v_0, opuśćmy prostopadłą Mc na oś O'O, wtedy:

$$v_1 = MC.\omega,$$

odłożymy długość równą v_1 wzdłuż prostopadłej, wystawionej do płaszczyzny, przechodzącej przez oś O'O i przez rozpatrywany punkt M w taką stronę, aby patrzący, mając prędkość kątową ω przechodzącą od nóg ku głowie, widział tenodcinek, skierowany od strony lewej ku prawej. Otrzymamy w taki sposób wektor, będzie przedstawiał prędkość obrotową v_1 punktu M. Budując na v_0 i v_1 równoległobok, otrzymamy prędkość v punktu M, jako przekątną tego równoległoboku.



Rys.50.

P r z y k ł a d. Bryła materialna obraca się jednostajnie z prędkością kątową ω = a dookoła osi O'ζ nieleżącej w jednej płaszczyznie z osią nieruchomą OZ/rys.51/, oznaczymy na jkrótszą odległość pomiędzy temi osiami przez d. Oś O'ζ obraca się jednostajnie z prędkością kątową ω = b dookoła osi OZ w taki sposób, iż najkrótsza odległość pomiędzy nimi jest stale równą d. W początkowym momencie czasu t = 0 oś O'ζ leży na płaszczyznie X,O,Z.

Równania ruchu są:

$$x_0 = d\cos bt, y_0 = d\sin bt, z_0 = 0,$$

$$\theta = const = \theta_0, \varphi = at, \psi = \frac{\pi}{2} + bt.$$

Skąd wynika, że

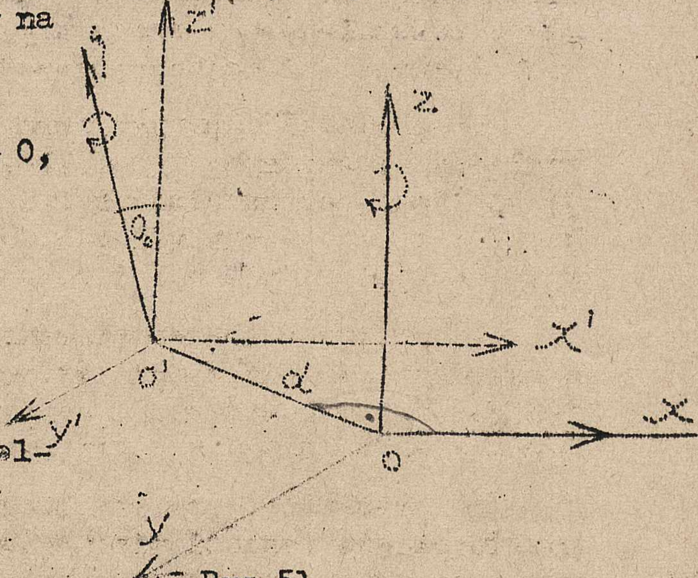
$$P = a \sin\theta_0 \cos bt$$

$$Q = a \sin\theta_0 \sin bt,$$

$$R = a\cos\theta_0 + b.$$

i prędkość kątową ω posiada wielkość stałą:

$$\omega = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta_0}$$



Rys.51.

...one wolowane ...ulanej ruchu ...owego $\frac{x_0' + Q(z-z_0) - R(y-y_0)}{P} = \frac{y_0' + R(x-x_0) - P(z-z_0)}{Q} =$

R o z d z i a ł VII.

S k ł a d a n i e i r o z k ł a d a n i e r u c h ó w p u n k t u i b r y ł y m a t e r i a l n e j.

We wstępie do Mechaniki teoretycznej,dowiedzieliśmy się,że ruch punktu materialnego jest zjawiskiem względnym,zależnym od wyboru układu odniesienia ,względem którego określamy położenie punktu ruchomego.W tym rozdziale będziemy rozpatrywać ruch punktu M względem pewnego układu odniesienia /B/ ,uważając jako znane

1/ ruch tego punktu M względem drugiego układu odniesienia /A/ (ruchomy)
i 2/ ruch tego układu /A/ względem układu /B/. (nieruchomy)

Przyjęto nazywać ruch punktu M względem układu /B/ r u c h e m b e z w z g l ę d e m ,ruch tegoż punktu względem układu /A/ -r u c h e m w z g l ę d n y m, a ruch układu /A/ względem układu /B/- r u c h e m u n o s z e n i a.

Możemy wtedy powiedzieć,że bezwzględny ruch punktu s k ł a d a s i ę z ruchu względnego i ruchu unoszenia.Oprócz tych nazw będziemy używać jeszcze innych,mianowicie,będziemy nazywać ruch bezwzględny ruchem z ł o ż o n y m ,a ruchy względny i unoszenia -ruchami s k ł a d o w y m i.

W każdym momencie czasu punkt M,jak wogóle punkty układu odniesienia /A/ ,posiadają pewne prędkości i przyspieszenia;punkt M posiada prędkości i przyspieszenia w ruchu bezwzględnym i ruchu względnym.Zatym w każdym momencie czasu możemy rozpatrywać następujące wielkości:

1/ prędkość i przyspieszenie punktu M w ruchu bezwzględnym oznaczymy tę wielkość przez v_b i W_b i będziemy je nazywali odpowiednio b e z w z g l ę d n ą p r ę d k o ś c i ą i b e z w z g l ę d n y m p r z y s p i e s z e n i e m punktu;

2/ prędkość i przyspieszenie punktu M w jego ruchu względnym ,te wielkości ,które będziemy nazywali w z g l ę d n ą p r ę d k o ś c i ą i w z g l ę d n y m p r z y s p i e s z e n i e m ,oznaczymy przez v_w i w_w;

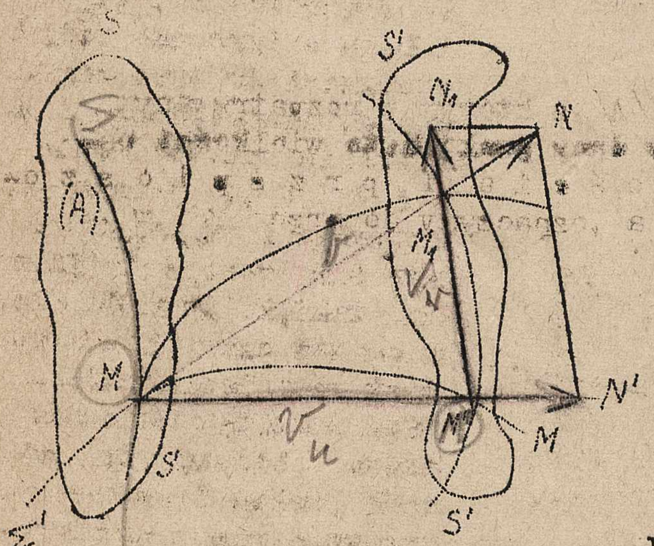
3/ prędkość i przyspieszenie w ruchu unoszenia tego punktu układu odniesienia /A/ ,z którym w rozpatrywanym momencie czasu jest zgodny dany punkt M,te wielkości będziemy nazywali p r ę d k o ś c i ą i p r z y s p i e s z e n i e m u n o s z e n i a ,oznaczymy je przez v_u i w_u.

Zauważymy, że v_u i w_u należą w rzeczywistości nie do punktu M, lecz do tego punktu układu /A/, który w danej chwili jest zgodny z rozpatrywanym punktem M.

S k ł a d a n i e m r u c h ó w będziemy nazywać wyznaczenie bezwzględnego ruchu punktu /t.j. wielkości v_b i w_b /, mając ruchy względny i unoszenia; zadanie odwrotne - określenie ruchów względnego i unoszenia /t.j. wielkości v_w, w_w, v_u i w_u / według danego ruchu bezwzględnego /t.j. danych v_b i w_b/ będziemy nazywać r o z k ł a d a - n i e m r u c h ó w .

Jest rzeczą możliwą, że układ odniesienia /B/ wykonywa pewien ruch względem układu innego /C/, a układ /C/ względem układu /D/ i.t.d. Wtedy ruchem bezwzględnym punktu M nazywamy jego ruch względem ostatniego układu odniesienia, zaś ruchy układów odniesienia nazywamy ruchami unoszenia pierwszym, drugim i.t.d. Łatwo zrozumieć, co nazywamy w wypadku kilku ruchów unoszenia składaniem i rozkładaniem ruchów.

Przedewszystkiem rozpatrzymy wyznaczenie prędkości bezwzględnej według danych prędkości względnej i unoszenia;



Rys.52.

niechaj w pierwszym momencie czasu t, ruchomy punkt zajmuje położenie M, a S'S będzie względnym torem tego punktu /rys.52/; ta krzywa S'S jest niezmiennie połączona z układem odniesienia /A/.

Przypuśćmy, że MM' jest torem ruchu unoszenia, t.j. torem ruchu tego punktu układu /A/ który jest zgodny w momencie czasu t z danym punktem M.

W ciągu okresu czasu t punkt M w ruchu bezwzględnym zakreślił łuk krzywej MM', w ruchu względnym łuk krzywej SS', a w ruchu unoszenia łuk krzywej MM'. Oznaczając przez V_b, V_w i V_u średnie prędkości punktu M w okresie czasu Δt w ruchu bezwzględnym, względnym i unoszenia będziemy mieli:

$$v_w = \frac{\overset{\frown}{M'M_1}}{\Delta t}, \quad v_b = \frac{\overset{\frown}{MM_1}}{\Delta t}, \quad v_u = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t},$$

ponieważ przejdziemy do granicy, więc przyjmiemy

$$v_w = \frac{M'M_1}{\Delta t}, \quad v_b = \frac{MM_1}{\Delta t}, \quad v_u = \frac{MM'}{\Delta t} \quad \ldots\ldots\ldots /1/$$

Przedstawiając te średnie prędkości za pomocą wektorów, otrzymamy:

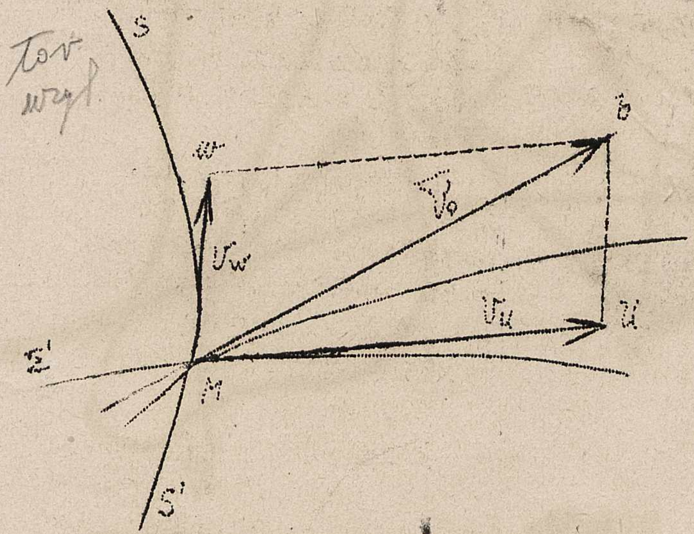
$$\overline{V}_w = \overline{M'N_1}, \quad \overline{v}_b = \overline{MN}, \quad \overline{V}_u = \overline{MN'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /2/$$

Z wzoru /1/ wynika, że

$$\frac{V_w}{M'M_1} = \frac{V_b}{MM_1} = \frac{V_u}{MM'},$$

oprócz tego cięciwy $M'M_1$, MM_1 i MM' tworzą trójkąt $MM'M_1$ więc wektory V_w, V_b, V_u muszą tworzyć trójkąt podobny do $\Delta MM'M_1$; innymi słowy łącząc punkty N' i N, otrzymamy odcinek $N'N \#\, M'N_1$, a dla tego czworobok $M'N_1NN'$ jest równoległobokiem.

Przejdźmy do granicy, robiąc $\Delta t \to 0$; wtedy V_w, V_u staną się równemi v_w, v_b, v_u i będą skierowane wzdłuż stycznych do toru względnego, bezwzględnego i unoszenia /rys.53/. Ponieważ V_w, V_b, V_u tworzą trójkąt, więc i v_w, v_b, v_u muszą też tworzyć trójkąt Mbu taki, że $Wb \# Mu$, dlatego też czworobok Mwbu jest równoległobokiem. Więc w każdym momencie czasu t bezwzględna prędkość punktu jest geometrycznie równą przekątnej równoległoboku, zbudowanego na prędkościach względnej i unoszenia tego punktu, czyli p r ę d k o ś ć r u c h u z ł o ż o n e g o j e s t g e o m e t r y c z n ą s u m ą p r ę d k o ś c i r u c h ó w s k ł a d o w y c h, t.j.



Rys.53.

$\overline{V_b} = \overline{V_w} + \overline{V_u}$

$$\overline{v_b} \quad \overline{v_w} \quad \overline{v_u}$$

Jeżeli układ /B/ porusza się względem jakiegokolwiek innego układu odniesienia /C/, wtedy otrzymana przed chwilą prędkość v_b będzie drugą z rzędu względną prędkością. Prędkość ruchu bezwzględnego v_{b1} będzie:

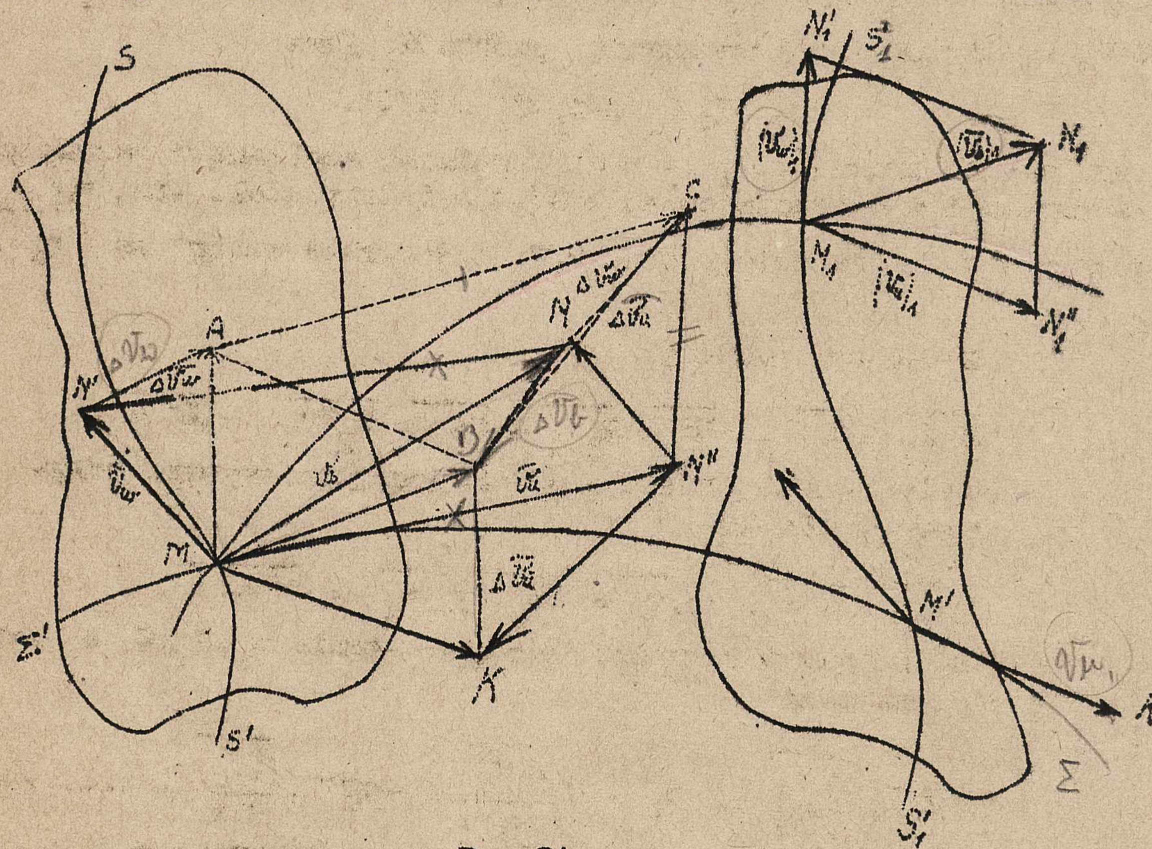
$$\overline{v_{b1}} = \overline{v_b} + \overline{v_{u1}} \text{ ,czyli}$$

$$\overline{v_{b1}} = \overline{v_w} + \overline{v_u} + \overline{v_{u1}}.$$

Gdy więc mamy dowolną liczbę ruchów składowych, wtedy prędkości tych ruchów składamy według prawa równoległoboku równoległościanu lub wieloboku prędkości.

Przypuśćmy, że w ruchu względnym w stosunku do układu odniesienia /A/ punkt M porusza się wzdłuż toru S'S rys. /54/ i w momencie czasu t zajmuje położenie M.

Następnie wyobraźmy sobie, iż układ /A/ wraz z torem S'S



Rys. 54.

posiada p o s t ę p o w y ruch unoszenia względem układu odniesienia /B/ i że tor określony podczas tego ruchu uno-

[illegible] przez ten punkt układu /A/ ,z którym jest zgodny w danym momencie czasu t rozpatrywany punkt M, jest krzywą Σ niech wreszcie toren ruchu bezwzględnego danego punktu M jest krzywa MM_1.

W ciągu przyrostu czasu Δt, punkt M zakreślił łuk MM_1 toru bezwzględnego, łuk MM' toru unoszenia i łuk $M'M_1$ toru względnego. Prędkość bezwzględna, względna i unoszenia w chwili t, są v_b, v_w, i v_u.

Na zasadzie poprzedniego v_b jest przekątną równoległoboku MN' NN" zbudowanego na v_w i v_u jako na bokach.

Ponieważ ruch unoszenia jest ruchem postępowym, więc po upływie czasu t, t.j. w momencie $t+\Delta t$, względny tor S'S zajmie położenie S'_1S_1, równoległe do poprzedniego. Oprócz tego z postępowego charakteru ruchu unoszenia wynika, że prędkości wszystkich punktów układu /A/ są geometrycznie jednakowe; jeżeli więc prędkość ruchu postępowego punktu M' jest $/v_u/_1$ = M'K', wtedy prędkość unoszenia punktu M_1 jest

$$/v_u/_1 = M_1N''_1 = M'K'.$$

Oznaczając przez $/v_w/_1$ i $/v_b/_1$ prędkość względną i bezwzględną punktu M w momencie czasu $t+\Delta t$ będziemy mieli, że $/v_b/_1$, jest przekątną równoległoboku $M_1N'_1\ N_1N''_1$, zbudowanego na $/v_w/_1$ i $/v_u/_1$.

Zbudujemy wektory

$$\overline{MA} = \overline{M_1N'_1},\ \overline{MB} = \overline{M_1N_1},\ \overline{MK} = \overline{M_1N''_1} = \overline{M'K'},$$

wtedy będziemy mieli następujące geometryczne przyrosty prędkości

$$\overline{\Delta v_w} = \overline{N'A},\quad \overline{\Delta v_b} = \overline{NB},\quad \overline{\Delta v_u} = \overline{N''K}.$$

Skąd znajdujemy średnie przyspieszenie w_w, W_b, W_u w okresie czasu t:

$$\overline{W_w} = \frac{\overline{\Delta v_w}}{\Delta t},\quad \overline{W_b} = \frac{\overline{\Delta v_b}}{\Delta t},\quad \overline{W_u} = \frac{\overline{\Delta v_u}}{\Delta t} \quad \ldots\ldots /4/$$

Wykażemy, że $\overline{\Delta v_b}$ jest geometryczną sumą $\overline{\Delta v_w}$ i $\overline{\Delta v_u}$.

W tym celu przeprowadzimy z N" prostą N"C, równą i równoległą do MA, punkt C połączymy prostymi CA i CB z punktami A i B.

Warunek N"C ⋕ MA podaje, że MA CN" jest równoległobokiem, a stąd wynika, że AC ⋕ MN".

Ale MN" ⋕ N'N, więc AC ⋕ N'N i dlatego AN'NC jest też równoległobokiem, w którym musi być AN' ⋕ NC, t.j.

$$\overline{\Delta v_w} = \overline{NC}$$

Podobnież budujemy N"C ⋕ MA, a ponieważ czworobok MA BK jest równoległobokiem, równym do $M_1N_1' N_1N''_1$, to MA ⋕ KB, skąd wynika, iż N"C ⋕ KB, innymi słowy KN"CB jest równoległobokiem i dlatego N"K ⋕ CB więc:

$$\overline{\Delta v_u} = \overline{CB}$$

Widzimy za tym, że boki trójkąta NBC są $\overline{v_b}$, $\overline{v_w}$ i $\overline{v_u}$, przy czym bok NB jest zamykającą linii łamanej, utworzonej przez dwa boki pozostałe, więc:

$$\overline{\Delta v_b} = \overline{\Delta v_w} + \overline{\Delta v_u} \qquad \text{..................../5/}$$

Z wzoru /4/ wynika, że

$$\frac{\overline{W_b}}{\overline{\Delta v_b}} = \frac{\overline{W_w}}{\overline{\Delta v_w}} = \frac{\overline{W_u}}{\overline{\Delta v_u}},$$

więc $\overline{W_b}$, $\overline{W_w}$ i $\overline{W_u}$ muszą tworzyć trójkąt podobny do trójkąta NBC; ponieważ zaś kierunki $\overline{W_b}$, $\overline{W_w}$ i $\overline{W_u}$ są zgodne z kierunkami przyrostów $\overline{\Delta v_b}$, $\overline{\Delta v_w}$ i $\overline{\Delta v_u}$, będziemy mieli:

$$\overline{W_b} = \overline{W_w} + \overline{W_u}$$

W granicy, gdy $\Delta t \to 0$, ostatecznie otrzymamy:

$$\overline{w_b} = \overline{w_w} + \overline{w_u} \qquad \text{............................./6/.}$$

Przyspieszenie **bezwzględnego ruchu punktu jest geometryczną sumą przyspieszeń ruchów względnego i unoszenia, gdy ruch unoszenia jest postępowy.**

Jest rzeczą oczywistą, że możemy uogólnić udowodnione twierdzenie w wypadku kilku przyspieszeń, mianowicie **przyspieszenie bezwzględnego /złożonego/ ruchu punktu jest geometryczną sumą przyspiesze-**

n i a r u c h u w z g l ę d n e g o i p r z y s p i e s z e ń r u c h ó w u n o s z e n i a , j e ż e l i t y l k o w s z y s t k i e r u c h y u n o s z e n i a s ą r u c h a m i p o s t ę p o w y m i . Z a t y m p r z y s p i e s z e n i e s k ł a d a m y w e d ł u g p r a w a w i e l o b o k u p r z y s p i e s z e ń .

Rozkładaniem danej prędkości lub danego przyspieszenia punktu na kilka prędkości lub przyspieszeń nazywamy określenie takich ruchów względnego i unoszeń ,podczas których prędkość lub przyspieszenie ruchu bezwzględnego posiadałyby dane wielkości i kierunki.Ponieważ dany wektor możemy uważać jako zamykającą nieskończenie wielu linii łamanych,więc rozkładanie danej prędkości,lub danego przyspieszenia punktu jest zadaniem nieokreślonym.Aby zadanie stało się określone,musimy podać ilość składowych i pewne warunki,dotyczące samych składa nych np. wielkości i kierunki niektórych z pośród nich.

Udowodnimy teraz twierdzenie C o r i o l i s'a o składaniu przyspieszeń punktu w wypadku ogólnym,mianowicie,gdy r u c h u m o s z e n i a j e s t d o w o l n y.

W tym celu wprowadzimy kinematyczne pojęcie o d e w i a c j i.Wyobraźmy sobie,że punkt M zakreśla tor S'S rys.55/ pod wpływem działania pewnej siły poruszającej. Gdy w momencie czasu t siła przestałaby działać,a punkt M w tej chwili posiadał prędkość bezwzględną v, wtedy w ciągu następującego okresu czasu Δt punkt M na zasadzie prawa bezwładności /patrz STatyka,rozdział I/ zakreśliłby prostoliniowy odcinek w kierunku stycznej

$$ML = v.\Delta t.$$

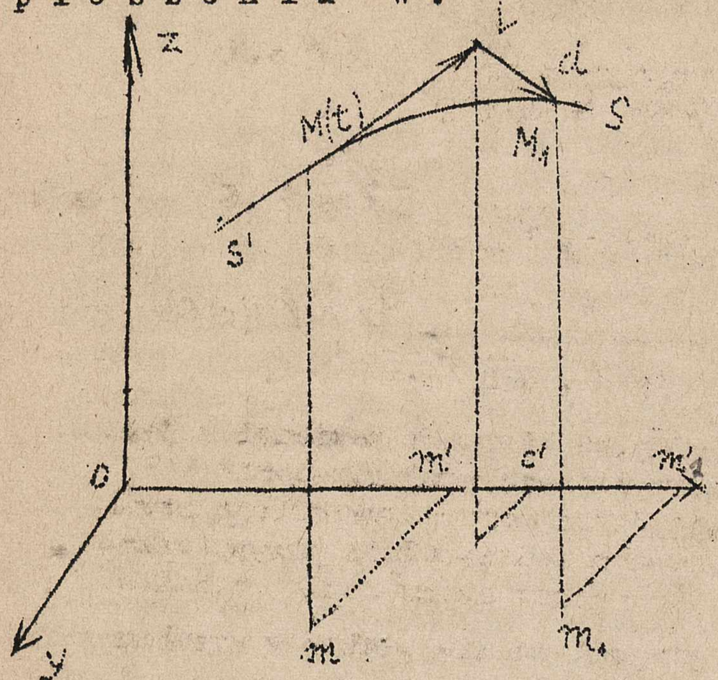
Ponieważ w rzeczywistości siła poruszająca punkt M nie przestaje działać, więc w ciągu czasu Δt punkt M przejdzie nie w położenie L,lecz w położenie M_1 na krzywej S'S Zatym dzoałanie siły na ruchomy punkt M w ciągu czasu Δt charakteryzuje się pewnym wektorem

$$\overline{LM_1} = \overline{d} ;$$

wektor ten nazywamy d e w i a c j ą.

Twierdzenie. d e w i a c j a p o s i a d a k i e r u n e k z g o d n y z k i e r u n k i e m b e z w z g l ę d n e g o p r z y s p i e s z e n i a w i

j e s t r ó w n a d r o d z e z a k r e ś l o n e j w c i ą g u c z a s u Δt p r z e z p u n k t p o r u s z a j ą c y s i ę r u c h e m j e d n o s t a j n i e p r z y s p i e s z o n y m o p r z y s p i e s z e n i u w.



Rys.55.

Równania ruchu punktu są: $x=\varphi/t/, y=\psi/t/, z=\chi/t/$.

Ponieważ położenia punktu M i M_1 odpowiadają momentom czasu t i t Δ t więc

$Om' = x=\varphi/t/$,

a $OM''_1=x+\Delta x=\varphi/t+\Delta t/$.

Oczywiście rzut $\overline{LM_1}=\bar{d}$ na oś OX jest

$d_x = m'm'_1 - M'e'$,

ale $m'm'_1 = Om'_1 - Om' = \varphi/t+\Delta t/ - \varphi/t/$ i $m'e' = v.\Delta t.\cos/v,X/ = \Delta t.x' = \Delta t.\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'/t/$,

więc

$$d_x = \varphi/t+\Delta t/ - \varphi/t/ - \Delta t\,\varphi'/t/ \;\;........./7/$$

Przedstawiając $\varphi/t/$ w postaci szeregu T a y l o r'a :

$$\varphi/t+\Delta t/ = \varphi/t/ + \frac{/\Delta t/}{1}.\varphi'/t/ + \frac{/\Delta t/^2}{2!}\varphi''/t/ + \frac{/\Delta t/^3}{3!}\varphi'''/t/ + \ldots$$

i wstawiając w /7/, znajdziemy, że

$$d_x = \frac{/\Delta t/^2}{2!}\varphi''/t/ + \frac{/\Delta t/^3}{3!}\varphi'''/t/ + \ldots\ldots\ldots$$

Pomijając wyrazy poczynając od drugiego, jako nieskończenie małe względem wyrazu pierwszego, otrzymamy:

$$d_x = \frac{/\Delta t/^2}{2!}\varphi''/t/ = \frac{/\Delta t/^2}{2}.\,x''$$

A analogicznie znajdziemy:

$$d_y = \frac{/\Delta t/^2}{2!}\psi''/t/ = \frac{/\Delta t/^2}{2}.\,y''$$

$$d_z = \frac{/\Delta t/^2}{2!}\chi''/t/ = \frac{/\Delta t/^2}{2}.\,z''$$

Skąd na zasadzie wzorów /23/ rozdziału V mamy:

$$d = \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right) = \frac{(\Delta t)^2}{2} w \quad \text{......... /8/}$$

i

$$\cos /d,X/ = \frac{d_x}{d} = \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \cos/w,X/$$

$$\cos /d,Y/ = \frac{d_y}{d} = \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \cos/w,Y/ \quad \text{...... /9/}$$

$$\cos /d,Z/ = \frac{d_z}{d} = \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \cos/w,Z/$$

Ze wzorów /9/ widzimy, że kierunek dewiacji d jest zgodny z kierunkiem bezwzględnego przyspieszenia w, a wzór /8/ stwierdza, że d jest drogą zakreśloną przez punkt poruszający się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem w, w ciągu czasu Δt. c.b.d.o.

Rozpatrzmy teraz przyspieszenie punktu w wypadku gdy ruch unoszenia jest dowolny:

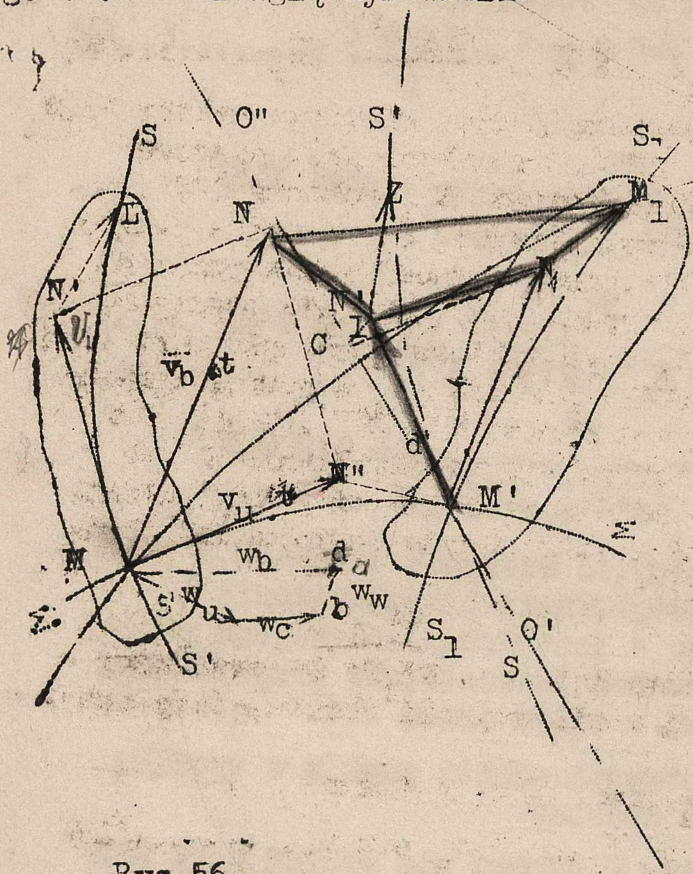
Względny ruch punktu M odbywa się wzdłuż toru S'S /rys.56/; prędkość tego ruchu jest v_w.

Tor S'S porusza się w przestrzeni przy czym punkt M tego toru zakreśla krzywą Σ'Σ ; prędkość ruchu unoszenia jest v_u.

Jako wynik tych dwóch ruchów otrzymujemy ruch bezwzględny wzdłuż toru MM_1; prędkość tego ruchu jest v_b.

W momencie czasu t, punkt ruchomy zajmuje położenie M i posiada względną prędkość v_w; po upływie tego czasu Δt ten punkt przesunie się ruchem względnym i zajmie na torze S'S nowe położenie L. Zbudujemy wektor $MN' = v_w \Delta t$, wtedy wektor N'L będzie dewiacją ruchu względnego. Podobnież zbudujemy wektor $MN'' = v_u \cdot \Delta t$ i dewiację N''M' ruchu unoszenia. Geometryczna suma wektorów MN' i MN'' daje nam wektor $MN = v_b \Delta t$, albowiem geometryczna suma $v_w + v_u = v_b$ otrzymuje się z równoległoboku MN'NN''. Ponieważ w ciągu czasu dt z powodu ruchu unoszenia tor S'S zajmie pewne położenie $S'_1 S_1$, więc punkt L zajmie nowe położenie M_1, będące jednocześnie nowym położeniem punktu M w je-

go ruchu bezwzględnym wzdłuż toru $M\,M_1$. Łącząc koniec N wektora $MN = v_b \triangle t$ z punktem M_1 otrzymamy dewiację NM_1 ruchu bezwzględnego. Wektror $M'N_1$ przedstawia położenie wektora MN' po upływie czasu $\triangle t$. Zbudujemy wektor $M'N'_1$ geometrycznie równy wektorowi MN' i połączymy za pomocą prostych punkty N, N'_1, N_1, M_1



Rys.56.

Wtedy będziemy mieli:

$$\overline{NN'_1} + \overline{N'_1N_1} + \overline{N_1M_1} = \overline{NM_1} \ldots /10/$$

Oznaczając, jak zwykle, przez w_b, w_u i w_w przyspieszenia ruchów bezwzględnego, unoszenia i względnego na zasadzie wzoru /8/ będziemy mieli /rys.56./:

$$\overline{NM_1} = \frac{/\triangle t/^2}{2} \cdot \bar{w}_b$$

$$\text{i } \overline{NN'_1} = \overline{N''M'} = \frac{/\triangle t/^2}{2} \cdot \bar{w}_u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /11/$$

Następnie ponieważ wektor N_1M_1 jest nowym położeniem wektora

$$\overline{N'L} = \frac{/\triangle t/^2}{2} \cdot \bar{w}_w ,$$

więc jego wartość liczebna jest równą

$$\frac{/\triangle t/^2}{2} \cdot w_w$$

gdy $\triangle t$ zdąża w granicy do zera, wtedy krzywe S'_1, S_1 i $S'S$ i wektory $\overline{N_1M_1}$ I $\overline{N'L}$ też zdążają do siebie, zatym w granicy wektor N_1M_1 posiada nie tylko wartość liczebną, lesz i

kierunek zgodny z dewiacją ruchu względnego, t.j.:

$$\overline{N_1 N_1} = \overline{N'L} = \frac{/\Delta t/^2}{2} \cdot \overline{w}_w \ldots\ldots\ /12/$$

Pozostaje nam jeszcze jeden składowy wektor N'_1N_1 geometrycznej sumy wzoru /10/. Ten wektor jest cięciwą łuku koła zakreślonego przez koniec N'_1 wektora $M'N'_1$ w ciągu czasu Δt podczas obrotu krzywej S'S dookoła pewnej osi chwilowego obrotu O'O'', przechodzącej przez punkt M', albowiem ruch unoszenia przypuszczamy, jako nie postępowy. Opuścimy z końców N'_1 i N_1 tego wektora prostopadłe na chwilową oś O'O''. Te prostopadłe przetną się w pewnym punkcie C tej osi O'O" i utworzą kąt obrotu N'_1CN_1. Gdy Δt zdąża do zera wtedy kąt ten maleje nieskończenie i łuk N'_1N_1 nieskończenie mało różni się od cięciwy N'_1N_1. Oznaczając przez ω prędkość kątową obrotu dookoła osi chwilowej O'O", Będziemy mieli:

$$N'_1N_1 = \Delta t \cdot \omega \cdot \overline{CN'_1}$$

Jeżeli wprowadzimy Kąt $\alpha = N'_1N_1 O''$ utworzony kierunkami prędkości v_w i chwilowej osi obrotu, wtedy znajdziemy

$$CN'_1 = M'N'_1 \cdot \sin = v_w \Delta t \cdot \sin\alpha ,$$

a więc

$$N'_1N_1 = /\Delta t/^2 \cdot \omega \cdot v_w \sin\alpha \ldots\ldots\ /13/$$

Jest rzeczą oczywistą, że wektor N'_1N_1 jest jednocześnie prostopadły do osi chwilowego obrotu OO' i do prędkości względnej v_w innymi słowy wektor N'_1M_1 jest prostopadły do płaszczyzny $N'_1M'C$.

Wstawiając te wyrażenia /11/, /12/, /13/ w równanie /10/ otrzymamy:

$$\frac{/\Delta t/^2}{2} \cdot \overline{w}_b = \frac{/\Delta t/^2}{2} \cdot \overline{w}_u + \overline{/\Delta t/^2 \cdot \omega \cdot v_w \cdot \sin\alpha} + \frac{/\Delta t/^2}{2} \overline{w}_w \ldots /14/$$

skąd po uproszczeniu:

$$\overline{w}_b = \overline{w}_w + \overline{w}_u + \overline{2\omega\, v_w \sin\alpha} = \overline{w}_w + \overline{w}_u + \overline{w}_c \ldots\ldots\ /15/$$

Gdy wzór /14/ odpowiada łamanej $NN'_1N_1M_1$, - wzór /15/ odpowiada łamanej Mcba podobnej do $NN'_1N_1M_1$, przy czym odpowiednie boki tych łamanych są równoległe i nadto

$$\overline{Ma} = \overline{w}_b,\ \overline{Mc} = \overline{w}_n,\ \overline{ba} = \overline{w}_w \text{ i } \overline{cb} = \overline{2\omega\, v_w \sin\alpha} = \overline{w}_c$$

Wektor /16/ $\overline{w}_c = \overline{cb} = \overline{2\omega\, v_w \sin\alpha}$ nazywamy przyspieszeniem nazywamy zwrotnym lub p r z y s p i e s z e n i e m C o r i o l i s ' a. Mamy więc następujące:

Twierdzenie: B e z w z g l ę d n e   p r z y s p i e s z e n i e   j e s t   g e o m e t r y c z n ą   s u m ą   t r z e c h   p r z y s p i e s z e ń : w z g l ę d n e g o , u n o s z e n i a   i   z w r o t n e g o , c z y l i   p r z y s p i e s z e n i a   C o r i o l i s a .

Z wzoru /16/ widzimy, że przyspieszenie Coriolis'a staje się zerem, gdy:

1/ $\omega = 0$ t.j. w wypadku postępowego ruchu u n o s z e n i a , innymi słowy, gdy względny tor S'S stale pozostaje do siebie równoległym /S'S // s's // S_1S_1/. Ten wypadek rozpatrywaliśmy osobno, mamy więc, że:

$$\bar{w}_b = \bar{w}_w + \bar{w}_u \quad \ldots\ldots\ldots /17/$$

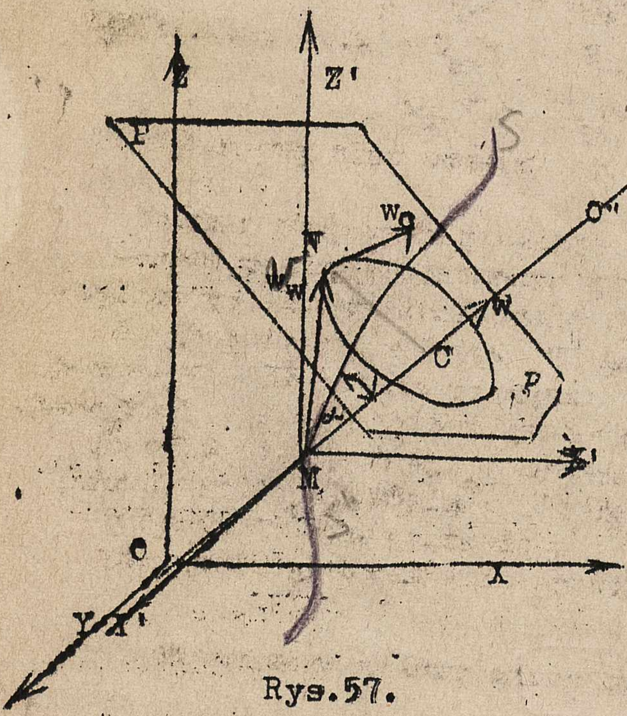
2/ $v_w = 0$ t.j. w w y p a d k u , g d y   w z g l ę d n y   r u c h   n i e   i s t n i e j e , wtedy

$$\bar{w}_b = \bar{w}_u \quad \ldots\ldots\ldots /18/$$

albowiem równość $v_w = 0$ pociąga za sobą, że $w_w = 0$ i $w_c = 0$.

3/ $\sin\alpha = 0$, t.j. $\alpha = 0$ innymi słowy w wypadku, gdy względna prędkość v_w jest równoległą do chwilowej osi obrotu toru względnego /S'S/, wtedy:

$$w_b = w_w + w_u \quad \ldots\ldots /19/$$



Rys.57.

Wyprowadzimy teraz wyrażenia rzutów przyspieszenia Coriolis'a w_c na nieruchome osie współrzędnych kartezjusza OXYZ /rys.57./. Punkt ruchomy porusza się wzdłuż toru względnego S'S i w danym momencie czasu t zajmuje położenie M. Przeprowadzimy przez koniec N wektora v_w płaszczyznę PP prostopadłą do chwilowej osi obrotu O'O'' przechodzącej przez dane położenie M punktu ruchomego. Wiemy, że wektor w_c jest prostopadłym do v_w i do O'O'' jednocześnie, dla tego więc w_c jest zawarte w płaszczyźnie PP i prostopadłe do pros-

tej CN, leżącej w tej płaszczyźnie. Zatym przyspieszenie Coriolis'a w_c musi być styczne do obwodu koła, zakreślonego przez koniec N wektora $\overline{v_w}$ podczas obrotu dookoła osi O'O". Z prostokątnego trójkąta MNC znajdujemy:

$$NC = MN.\sin\alpha = v_w.\sin\alpha ;$$

wtedy wzór /16/ daje nam, że

$$w_c = 2\omega .NC.$$

Iloczyn ω.NC jest wielkością prędkości liniowej punktu N podczas obrotu dookoła osi O'O" z prędkością kątową ω; stąd wnioskujemy, iż przyspieszenie Coriolis'a $\overline{w_c}$ jest dwa razy większe od liniowej prędkości obrotowej punktu N i jest skierowane zgodnie z tą prędkością. Dlatego też rzuty $\overline{w_c}$ na osie współrzędnych OXYZ, będą też dwa razy większe od rzutów na te same osie liniowej prędkości obrotu punktu N.

Wyobraźmy sobie pomocniczy układ osi MX'Y'Z' równoległych do osi OXYZ; oczywiście rzuty dowolnego wektora na te osie są jednakowe. Ponieważ zaś współrzędne punktu N względem osi MX'Y'Z' są równe rzutom na te osie wektora $\overline{v_w}$ = MN, a rzuty liniowej prędkości obrotowej dookoła osi chwilowej wyrażają się wzorami Euler'a /54/ § 4 rozdziału VI, więc otrzymamy następujące wyrażenia na rzuty przyspieszenia Coriolis'a na osie MX'Y'Z', a tym samym na osie OXYZ

$$\left.\begin{aligned} w_{cx} &= 2/v_{wz}Q - v_{wy}R/ \\ w_{cy} &= 2/v_{wx}R - v_{wz}P/ \\ w_{cz} &= 2/v_{wy}P - v_{wx}Q/ \end{aligned}\right\} \quad ..../20/$$

przy czym P, Q i R są rzutami na te same osie prędkości kątowej ω.

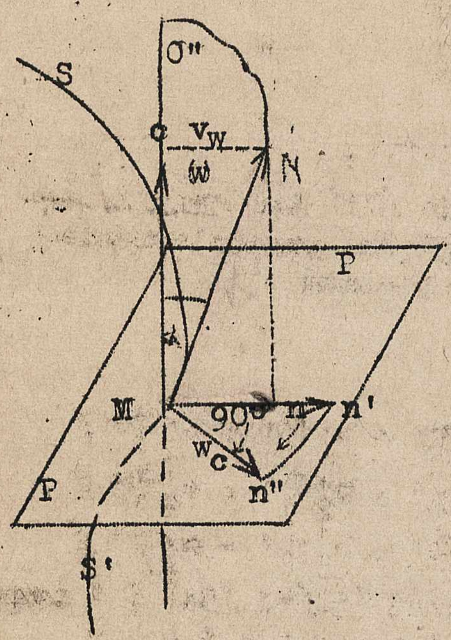
Z poprzednich rozumowań wynika następujące bardzo proste prawidło geometrycznego wyznaczenia przyspieszenia zwrotnego Coriolis'a $\overline{w_c}$: mianowicie rzutujemy względną prędkość $\overline{v_w}$ na płaszczyznę PP /rys.58/, prostopadłą do osi chwilowego obrotu O'O": otrzymamy wektor $\overline{Mn} = v_w.\sin\alpha$, pomnożymy przez 2ω znajdziemy nowy wektor $\overline{Mn'} = + 2\omega.v_w\sin\alpha$. Ponieważ wiemy, że przyspieszenie w_c jest prostopadłe do płaszczyzny zawierającej prędkość względną $\overline{v_w}$ i oś obrotu O'O", więc obróćmy wektor $\overline{Mn'}$ w płaszczyźnie PP o kąt prosty dookoła osi O'O" w stronę obrotu, wtedy otrzymamy wektor Mn" = $\overline{w_c}$.

Zagadnienie względnego ruchu punktu wysuwa dwa główne zadania:

1/ według danego ruchu unoszenia bryły i względnego ruchu punktu względem tej osi wyznaczyć bezwzględny ruch

tego punktu;

2/ według danego ruchu unoszenia bryły i bezwzględnego ruchu punktu wyznaczyć względny ruch tego punktu względem bryły. W pierwszym zadaniu mamy $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$ i ξ, η, ζ jako funkcje czasu t; musimy znaleźć wyrażenia bezwzględnych współrzędnych x, y, z, tego punktu w zależności od t. Zadanie to rozwiązują bezpośrednio wzory /62/ § 5 rozdziału VI, mianowicie:



Rys. 58.

$$x = x_0 + a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta$$
$$y = y_0 + a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \quad \ldots\ldots /21/$$
$$z = z_0 + a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta$$

W zadaniu drugim mamy: $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$ i x, y, z jako funkcje czasu t; musimy znaleźć zależności względnych współrzędnych ξ, η, ζ od czasu t. Rozwiązanie otrzymujemy z wzorów /63/ § 5 rozdziału VI.

W tym rozdziale wyprowadziliśmy geometrycznym sposobem zależności pomiędzy prędkościami i przyspieszeniami bezwzględnymi i względnymi. Otrzymaliśmy podstawowe wzory /3/ i /15/. Te same wyniki możemy otrzymać analitycznym sposobem z wzorów /21/. Rzeczywiście, różniczkując je względem czasu t i biorąc pod uwagę, że w obecnym wypadku ξ, η, ζ są wielkościami zmiennemi, otrzymamy:

$$x' = x_0' + a_1'\xi + b_1'\eta + c_1'\zeta + a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta'$$
$$y' = y_0' + a_2'\xi + b_2'\eta + c_2'\zeta + a_2\xi' + b_2\eta' + c_2\zeta' \quad \ldots\ldots /22/$$
$$z' = z_0' + a_3'\xi + b_3'\eta + c_3'\zeta + a_3\xi' + b_3\eta' + c_3\zeta'$$

Pierwsze cztery wyrazy tych wzorów na podstawie równości /64/ § 5 rozdziału VI są odpowiednio równe rzutom na osie nieruchome /bezwzględne/ OXYZ prędkości tego punktu bryły materialnej, który w danej chwili t jest zgodny z punktem ruchomym /x, y, z/; zatym te cztery wyrazy oznaczają rzuty na osie OXYZ prędkości unoszenia v_u, pozostałe trzy wyrazy wzorów /22/ są oczywiście rzutami względnej prędkości v_w /ξ', η', ζ'/ na osie nieruchome /bezwzględne/ OXYZ t.j.

$$a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta' = v_w \cdot \cos/v_w, X/ = v_{wx};$$
$$a_2\xi' + b_2\eta' + c_2\zeta' = v_w \cdot \cos/v_w, Y/ = v_{wy};$$
$$a_3\xi' + b_3\eta' + c_3\zeta' = v_w \cdot \cos/v_w, Z/ = v_{wz};$$

Więc wzory /22/ możemy napisać w ten sposób:

$$v_{bx} = v_{ux} + v_{wx},$$
$$v_{by} = v_{uy} + v_{wy},$$
$$v_{bz} = v_{uz} + v_{wz},$$

Skąd wynika, że

$$\overline{v_b} = \overline{v_u} + \overline{v_w} \quad \text{c.b.d.o.}$$

Podobnież różniczkując równania /21/ dwa razy z rzędu, przyjdziemy do wniosku, że bezwzględne przyspieszenie j jest geometryczną sumą trzech przyspieszeń

$$\overline{w_b} = \overline{w_u} + \overline{w_w} + \overline{w_c},$$

przy czym okaże się, że

$$w_{cx} = w_c /\cos w_c, x/ = 2./a_1'\xi' + b_1'\eta' + c_1'\zeta'/$$
$$w_{cy} = 2./a_2'\xi' + b_2'\eta' + c_2'\zeta'/$$
$$w_{cz} = 2./a_3'\xi' + b_3'\eta' + c_3'\zeta'/$$

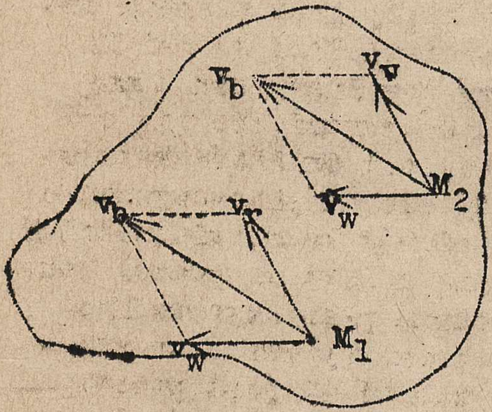
Porównując otrzymane wzory z wzorami /50/ i /54/ § 4 rozdziału VI, widzimy, że p r z y s p i e s z e n i e w_c j e s t g e o m e t r y c z n i e r ó w n e p o d w o j o n e j p r ę d k o ś c i o b r o t o w e j t e g o p u n k t u b r y ł y m a t e r i a l n e j, k t ó r e g o p r o m i e ń w o d z ą c y p r z e p r o w a d z o n y z b i e g u n a O' j e s t g e o m e t r y c z n i e r ó w n y w z g l ę d n e j p r ę d k o ś c i v_w. Stąd wynika, że przyspieszenie w_c jest właśnie przyspieszeniem zwrotnym czyli Coriolis'a.

Rozpatrzmy kilka najprostszych wypadków składania ruchów:

I. S k ł a d a n i e r u c h ó w p o s t ę p o w y c h.

Bryła wykonuje dwa ruchy postępowe, ruch względny z prędkością v_w i ruch unoszenia z prędkością v_u. Wyznaczymy bezwzględny ruch tej bryły, innymi słowy znajdziemy ruch złożony. Podczas ruchu względnego wszystkie punkty bryły posiadają geometrycznie równe prędkości v_w a podczas ruchu unoszenia też geometrycznie równe prędkości v_u rys. /5 9/

Obierzemy dwa dowolne punkty M_1 i M_2 tej bryły; bezwzględne prędkości tych punktów są geometrycznymi sumami prędkości względnej i unoszenia, które dla wszystkich punktów są jednakowe, więc ich geometryczne sumy też są jednakowe. W tym bezwzględne prędkości dwóch dowolnych punktów bryły mają jednakowe wielkości i kierunki. Stąd wynika, że bezwzględny ruch bryły złożony z dwóch postępowych ruchów składowych /względnego i unoszenia/ jest ruchem postępowym przy czym prędkość tego ruchu /bezwzględna/ przedstawia się za pomocą przekątnej równoległoboku zbudowanego na prędkościach składowych jako na bokach. Oczywiście ten wynik pozostaje prawomocnym w wypadku dowolnej liczby postępowych ruchów składowych mianowicie: ruch bryły złożony z z dowolnej liczby ruchów postępowych, jest ruchem postępowym, prędkość tego ruchu jest geometryczną sumą prędkości ruchów składowych i przedstawia się za pomocą zamykającej wieloboku, zbudowanego na prędkościach składowych jako na bokach.

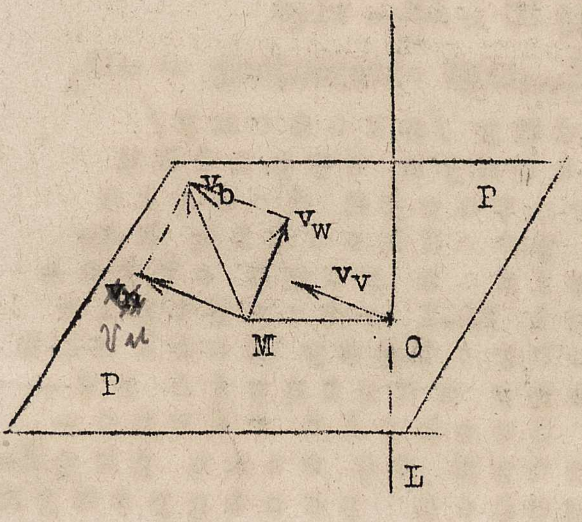


Rys.59.

II Składanie ruchów : obrotowego dookoła pewnej osi i postępowego w kierunku prostopadłym do tej osi.

Bryła obraca się dookoła osi LL z prędkością kątową ω i oprócz tego wykonywuje postępowy ruch unoszenia w kierunku prostopadłym do osi obrotu: prędkość tego ruchu jest $\overline{v_u}$. Bezwzględny czyli złożony ruch bryły jest płaskim ruchem równoległym do płaszczyzny prostopadłej do osi LL obrotu bryły /rys.60/. Przeprowadźmy dowolną płaszczyznę PP prostopadle do osi LL. Od punktu O, przecięcia się osi LL z płaszczyzną PP, odłożymy na tej osi prędkość kątową w taką stronę, aby widz znajdujący się na płaszczyźnie Pp i mający ten kierunek skierowanym od nóg ku głowie, widział obrót dookoła osi LL odbywającym się z lewa na prawo. Weźmiemy dowolny punkt bryły M położony na płaszczyźnie PP; jego prędkość bezwzględna $\overline{v_b}$ jest geometryczną sumą prędkości składowych $\overline{v_u}$ i $\overline{v_w}$. Ponieważ zaś oś LL jest prostopadłą do płaszczyzny PP, więc $\overline{v_w}$ jest zawarte w tej płaszczyźnie, oprócz tego prostopadłe do promienia wodzącego CM i równe $v_w = \omega \cdot OM$.

Prędkość bezwzględną $\overline{v_b}$ znajdziemy, jeżeli zbudujemy równoległobok na $\overline{v_w}$ i $\overline{v_n}$ jako na bokach; oczywiście $\overline{v_b}$ jest położone na płaszczyźnie PP.



Rys.60.

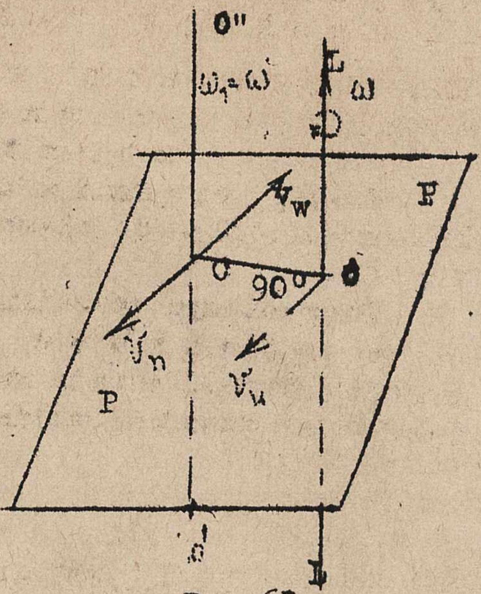
Wyznaczymy taki punkt C, którego prędkość bezwzględna byłaby zerem /rys.61/. Aby $v_b = 0$, prędkości $\overline{v_n}$ i $\overline{v_w}$ tego punktu muszą być koniecznie równe co do wielkości i skierowane wzdłuż jednej prostej w przeciwne strony. Dlategoażeby $v_n = v_w$ wystarczy punkt C obrać w taki sposób, aby

$$OC = \frac{v_u}{\omega},$$

rzeczywiście wtedy

$$v_w = OC.\omega = \frac{v_u}{\omega}\omega = v_u$$

Dla tego, żeby prędkości $\overline{v}_u$ i $\overline{v}_w$ były skierowane w zdłuż jednej prostej, promień wadzący OC musi być prostopadły do kierunku $\overline{v}_u$. Wreszcie dlatego, żeby $\overline{v}_u$ i $\overline{v}_w$ byłyskierowane w przeciw ne strony, promień wodzący OC musi być skierowany w taką stronęod punktu O, aby patrzący, mając nogi w punkcie O, głowę w punkcie C i patrząc na ω, widział prędkość unoszenia v punktu O skierowaną od lewej^u^ku prawej. Prosta O'O" przechodząca przez punkt C równolegle do osi obrotu LL, jest oczywiście c h w i l o w ą o- sią r u c h u b e z w z g l ę d n e g o, ponieważ wszystkie punkty tej osi w rozpatrywanym momencie czasu są nieruchome.



Rys.61.

Znajdźmy prędkość kątową obrotu ω_1 dookoła chwilowej osi O'O". Bezwzględna prędkość $\overline{v}_n$ punktu O jest geometrycznie równą prędkości unoszenia $\overline{v}_u$, a lbowiem względna prędkość tego punktu jest zerem: $v_w = 0$. Więc z jejdnej strony mamy, że $v_n = v_u = \omega_1 . OC$, a z drugiej $OC = \frac{v_u}{\omega}$ więc

$$v_u = \omega_1 \frac{v_u}{\omega}, \text{skąd otrzymujemy } \omega = \omega_1$$

Zatym b e z w z g l ę d n y /z ł o ż o n y/ r u c h b r y ł y w o b e c n y m w y p a d k u j e s t r u c h e m o b r o t o w y m d o o k o ł a o s i O'O" z tą s a m ą p r ę d k o ś c i ą k ą t o w ą, j a k ą p o s i a d a r u c h o b r o t o w y d o o k o ł a o s i LL. I o d w r o t n i e o d w r o t n y r u c h o b r o t o w y d o o k o ł a o s i z a w s z e m o ż e m y z a s t ą p i ć r u c h e m o b r o t o w y m d o o k o ł a r ó w n o l e g ł e j o s i m a j ą c y m t ę s a m ą p r ę d k o ś ć k ą t o w ą i r u c h e m p o s t ę p o w y m

o prędkości, jaką posiadał dowolny punkt nowej osi podczas obrotu dookoła danej osi.

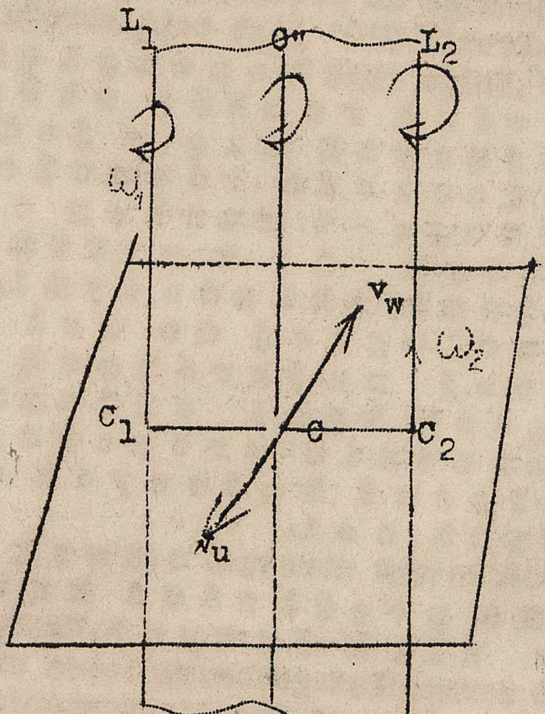
III. Składanie ruchów obrotowych dookoła równoległych osi obrotu.

Bezwzględny ruch w tym wypadku jest ruchem płaskim, równoległym do płaszczyzny prostopadłej do osi obrotów.

Przypuśćmy z początku, że obroty dookoła osi odbywają się w jednakową stronę. Oznaczymy przez ω_1 prędkość kątową obrotu ruchu unoszenia dookoła osi L_1L_1 rys.62/, a przez ω_2 prędkość kątową obrotu względnego dookoła osi L_2L_2. Ponieważ ruch bezwzględny jest ruchem płaskim w płaszczyznie prostopadłej do osi składowych obrotów, więc istnieje na tej płaszczyznie środek chwilowy C danego momentu czasu i odpowiednia oś obrotu chwilowego O'O", równoległa do danych osi. Bezwzględna prędkość punktu C, jak zresztą dowolnego punktu prostej O'O", jest zerem, ponieważ zaś

$$\overline{v}_b = \overline{v}_u + \overline{v}_w$$

więc geometryczna suma obrotowych prędkości punktów prostej O'O" dookoła osi L_1L_1 i L_2L_2 jest zerem. Dlatego też prędkości obrotowe $\overline{v}_u$ i $\overline{v}_w$ dowolnego punktu prostej O'O" są równe co do wielkości i skierowane wzdłuż



Rys.62.

jednej prostej w przeciwne strony. Stąd wynika, że chwilowa oś O'O" jest nietylko równoległą do odi L_1L_1 i L_2L_2, lecz jest położoną w taki sposób na płaszczyźnie, przechodzącej przezte osie, że znajduje się pomiędzy nimi i że najkrótsze jej odległości są takie, iż

$$v_u = v_w$$

Ponieważ zaś

$$v_u = \omega_1 CC_1, \quad v_w = \omega_2 CC_2,$$

więc

$$\omega_1 . CC_1 = \omega_2 . CC_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /23/$$

skąd mamy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{CC_2}{CC_1},$$

t.j. punkt C dzieli odległość pomiędzy L_1L_1 i L_2L_2 na części odwrotnie proporcjonalne do prędkości kątowych obrotów dookoła tych osi. Prosta O'O" jest osią obrotu bezwzględnego /złożonego/. Zatym ruch b e z w z g l ę d n y, z ł o ż o n y z d w ó c h r u c h ó w o b r o t o w y c h, o d b y w a j ą c y c h s i ę w j e d n a k o w ą s t r o n ę d o o k o ł a r ó w n o l e g ł y c h o s i o b r o t u j e s t r u c h e m o b r o t o w y m o d b y w a j ą c y m s i ę w s t r o n ę z g o d n ą z o b r o t a m i s k ł a d o w y m i, d o o k o ł a o s i r ó w n o l e g ł e j d o o s i d a n y c h i d z i e l ą c e j n a j k r ó t s z ą o d l e g ł o ś ć p o m i ę d z y t e m i o s i a m i n a c z ę ś c i o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e d o p r ę d k o ś c i k ą t o w y c h o b r o t ó w d o o k o ł a t y c h o s i.

Wykażemy, że prędkość kątowa obrotu b e z w z g l ę d n e g o j e s t s u m ą p r ę d k o ś c i k ą t o w y c h o b r o t ó w s k ł a d o w y c h. Względną prędkość punktu C_2 jest zerem; dlatego bezwzględna prędkość tego punktu jest równą jego prędkości unoszenia;

$$v_b = v_u = \omega_1 C_1 C_2$$

Podczas obrotu dookoła osi O'O" bezwzględna prędkość punktu C_2 jest

$$v_r = \omega . CC_2 ,$$

więc porównując znajdziemy, że

$$\omega \cdot CC_2 = \omega_1 \cdot C_1C_2 = \omega_1 /CC_1 + CC_2/$$

Biorąc pod uwagę zależność /23/ otrzymamy :

$$\omega \cdot CC_2 = \omega_1 \cdot CC_2 + \omega_2 \cdot CC_2$$

Skąd

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \qquad \text{c.b d.o.}$$

Zauważymy zupełną analogię poprzedniego wyniku ze składaniem dwóch rów nólegiych i jednakowo skierowanych sił w statyce,

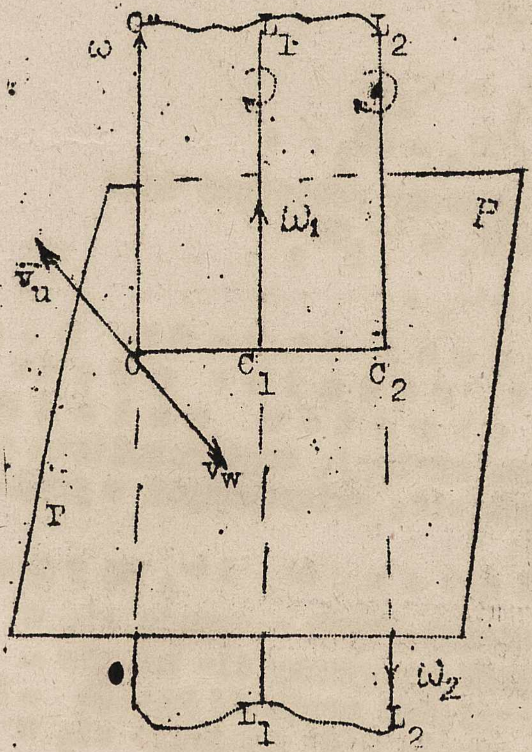
Przypuśćmy teraz,że obroty dookoła równoległych osi odbywają się w strony przeciwne.Rozpatrzymy osobne dwa wypadki:

1/ prędkoś ci kątowe tych obrotów ω_1 i ω_2 są nierówn i

2/ prędkoś ci kątowe ω_1 i ω_2 są równe $\omega_1 = \omega_2$.

1/ Przypuśćmy,że np. $\omega_1 > \omega_2$.Rozumując jak w wypadku poprzednim,przychodzimy do wniosku,że istnieje chwilowa oś obrotu O'O",równoległa do danych osi. Prędkości względna i unoszenia v_w i v_u /rys.63/ dowolnego punktu C tej osi muszą być skierowane wzdłuż jednej prostej w przeciwne strony i oprócz tego muszą mieć równe wielkości. Dlatego oś O'O" jest położoną w taki sposób na płaszczyźnie,przechodzącej te dane osie,że znajduje się zewnątrz nich ze strony tej osi prędkość kątowa,której jest większą /na rys.63/ oś L_1L_1, albowiem $\omega_1 > \omega_2$ /. i że najkrótsze jej odległości od danych osi są takie,iż

$$v_u = v_w$$



Rys.63.

Ponieważ zaś

$$v_u = \omega_1 CC_1 \text{ i } v_w = \omega_2 CC_2$$

więc

$$\omega_1 CC_1 = \omega_2 CC_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /24/$$

skąd

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{CC_2}{CC_1}$$

t.j. punkt C dzieli odległość pomiędzy osiami L_1L_1 i L_2L_2 w stosunku zewnętrznym na części odwrotnie proporcjonalne do prędkości kątowych obrotów dookoła tych osi; oś O'O" jest osią bezwzględnego obrotu, a punkt C środkiem bezwzględnego obrotu w płaszczyźnie Π.

Określmy zależność pomiędzy prędkościami kątową obrotu bezwzględnego i prędkościami kątowemi ω_1 i ω_2 obrotów składowych. Ponieważ względna prędkość punktu C_2 jest zerem: $v_w = 0$, więc bezwzględna prędkość tego punktu jest $v_b = v_u = \omega_1 C_1C_2$. Ponieważ bezwzględna prędkość jest prędkością obrotową dookoła osi O'O", więc $v_b = \omega CC_2$, porównując otrzymujemy, że

$$\omega_1 . C_1C_2 = \omega . CC_2,$$

ale

$$C_1C_2 = CC_2 - CC_1$$

i dla tego

$$\omega . CC_2 = \omega_1 /CC_2 - CC_1/ ;$$

Na podstawie zależności /24/ , możemy przepisać tak:

$$\omega . CC_2 = \omega_1 . CC_2 - \omega_2 CC_2$$

i

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 .$$

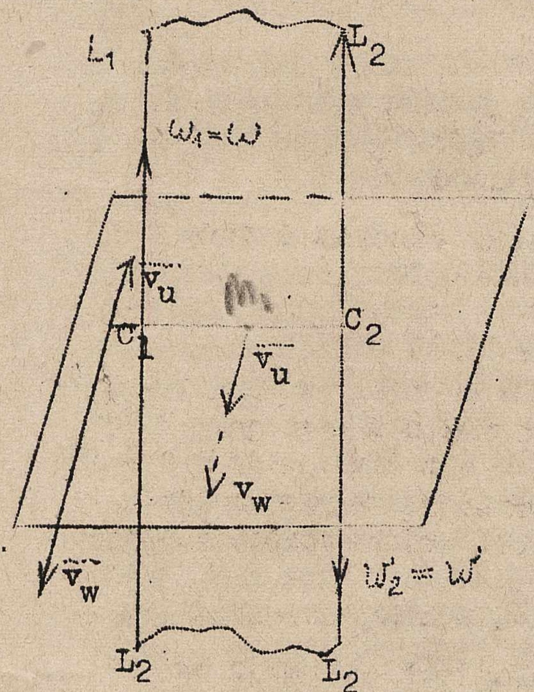
Zatym p r ę d k o ś ć k ą t o w a ω o b r o t u b e z w z g l ę d n e g o j e s t r ó ż n i c ą p r ę d k o ś c i k ą t o w y c h o b r o t ó w s k ł a d o w y c h. Znowu widzimy zupełną analogję tego rezultatu z składaniem dwóch równoległych sił, skierowanych w przeciwne strony /patrz statykę/.

2/ P r ę d k o ś c i k ą t o w e ω_1 i ω_2 są r ó w n e, a obroty dookoła osi równoległych odbywają się w strony przeciwne. Stosując wynik otrzymany dla nierównych prędkości kątowych, bezwzględna prędkość kątowa $= 0$, a odpowiadająca jej osi obrotu O'O" znajduje się w nieskończoności.

Wykażemy, że b e z w z g l ę d n y /z ł o ż o n y/

ruch w obecnym wypadku jest ruchem postępowym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zawierającej dane osie obrotów, przy czym prędkość postępowa tego ruchu jest równa iloczynowi danej prędkości kątowej i najkrótszej odległości pomiędzy osiami. W tym celu wystarczy wykazać, że dwa dowolne punkty płaszczyzny, zawierającej dane osie L_1L_1 i L_2L_2 posiadają geometrycznie równe prędkości prostopadłe do tej płaszczyzny.

Weźmiemy dowolnie punkt M_1, położony pomiędzy osiami L_1L_1 i L_2L_2 /rys.64/. Prędkość obrotowa punktu M_1, wynikająca z obrotu doo koła osi L_1L_1 jest $v_u = \omega . C_1M_1$; prędkość obrotowa tegoż punktu M_1, wynikająca z obrotu dookoła osi L_2L_2 jest $v_w = \omega M_1C_2$. Ponieważ v_u i v_w są prostopadłe do płaszczyzny, zawierającej proste L_1L_1 i L_2L_2 i skierowane w jednakową stronę, więc ich wypadkowa t.j. bezwzględna prędkość v_b punktu M_1, będzie też prostopadłą do tej płaszczyzny i równą sumie v_u i v_w.



Rys.64.

$$v_b = v_u + v_w = \omega / C_1M_1 + C_2M / = \omega . C_1C_2 .$$

Weźmiemy jakikolwiek inny punkt M_2, położony zewnątrz osi L_1L_1 i L_2L_2. Prędkości obrotowe tego punktu dookoła osi L_1L_1 i L_2L_2 odpowiednio są:

$v_u = \omega . M_2C_1$ i $v_w = \omega . C_2M_2$.

Te prędkości są prostopadłe do płaszczyzny osi L_1L_1 i L_2L_2 i skierowane wzdłuż jednej prostej w przeciwne strony, w ~~ięc ich wypadkowa~~ v_b jest też prostopadłą do wynie-

nionej płaszczyzny i równą różnicy

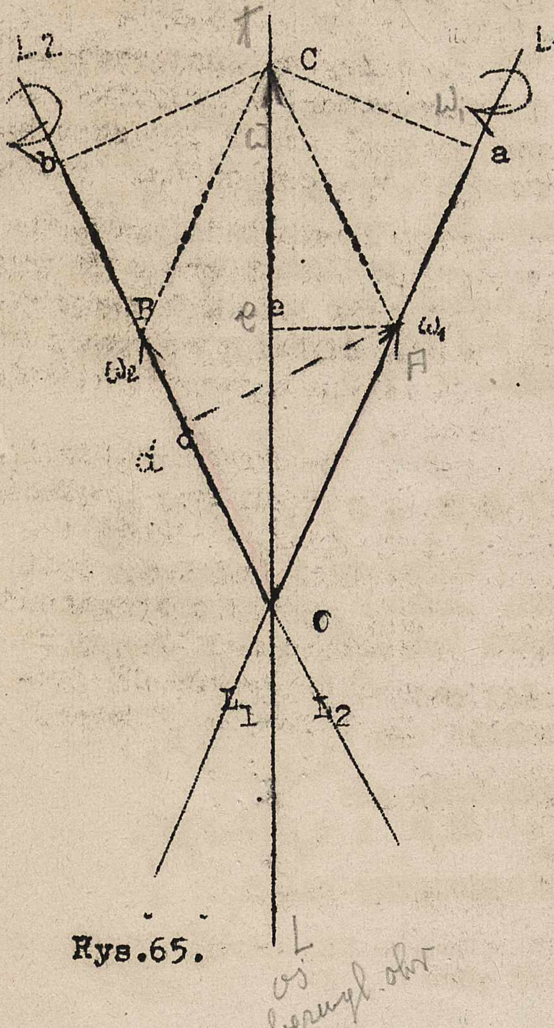
$$v_b = v_w - v_u \ /C_2M_2 - M_2C_1/ = C_1C_2$$

Porównując prędkości punktów M_1 i M_2 widzimy, że są one geometrycznie równe c.b.d.o.

Ten wypadek składania obrotów dookoła równoległych osi jest analogiczny do pary sił w statyce, dlatego też czasem nazywają go "p a r ą   o b r o t u".-

IV. S k ł a d a n i e   r u c h ó w   o b r o t o w y c h   d o o k ł a   o s i , p r z e c i n a j ą c y c h   s i ę   w   j e d n y m   p u n k c i e.

Bryła materialna obraca się dookoła osi L_1L_1 z prędkością kątową ω_1, ten ruch uważamy jako względny; oprócz tego bryła obraca się dookoła osi L_2L_2 przecinającej oś L_1L_1 w pewnym punkcie O; prędkość kątowa tego ruchu unoszenia jest ω_2.



Rys.65.

Prędkości kątowe ω_1 i ω_2 przedstawimy jak zwykle za pomocą wektorów CA i CB, skierowanych wzdłuż osi obrotów L_1L_1 i L_2L_2 w odpowiednie strony /65/ Jest rzeczą oczywistą, że ruch bezwzględny /złożony/ jest ruchem obrotowym dookoła nieruchomego punktu O, albowiem ten punkt pozostaje nieruchomym podczas ruchów składowych t.j. podczas obrotów dookoła osi L_1L_1 i L_2L_2. Wiemy, że ruch obrotowy dookoła punktu sprowadza się do ruchu obrotowego dookoła osi chwilowego obrotu /tw.d'Alembert-Eulera p.4 rozdział VI/, przez ten punkt przechodzącej. Wyznaczymy

kierunek tej osi O'O" i wielkość prędkości kątowej obrotu dookoła niej. W tym celu zbudujemy równoległobok na wektorach ω_1 i ω_2, jako na bokach; wykażemy, że wierzchołek C tego równoległoboku OACB podczas ruchu bezwzględnego pozostaje w spoczynku, innymi słowy, że bezwzględna prędkość tego punktu v_b jest zerem. Opuszczając z punktu C prostopadłe Ca i Cb na osie L_1L_1 i L_2L_2 będziemy mieć, że

$$v_w = \omega_1 \cdot Ca \ , v_u = \omega_2 \cdot Cb$$

Ale $\omega_1 \cdot Ca = 2$ pole $\triangle$ OCA,

$\omega_2 \cdot Cb = 2$ pole $\triangle$ OCB

i oprócz tego trójkąty OAC i OCB są równe, więc

$$\omega_1 Ca = \omega_2 \cdot Cb,$$

skąd wynika, że $v_w = v_u$.

Ponieważ obroty dookoła osi L_1L_1 i L_2L_2 odbywają się w kierunku ruchu strzałki zegara, dlatego prędkość v_w i v_u punktu C będą prostopadłemi do płaszczyzny, przechodzącej przez osie L_1L_1 i L_2L_2 i skierowanemi w przeciwne strony od tej płaszczyzny. Prędkość bezwzględna v_b, będąc geometryczną sumą tych prędkości v_w i v_u, jest zerem. c.b.d.

Na zasadzie tego, że dwa punkty bryły O i C pozostają nieruchome, wnioskujemy, iż chwilowa oś obrotu O'O" przechodzi przez te punkty. Ta oś jest osią obrotu bezwzględnego i posiada kierunek zgodny z kierunkiem przekątnej równoległoboku, zbudowanego na prędkościach kątowych obrotów składowych ω_1 i ω_2 jako na bokach.

Pozostaje nam określić wielkość prędkości kątowej ω obrotu dookoła tej osi. W tym celu rozpatrzymy prędkości względną i unoszenia punktu A; względna prędkość tego punktu t.j. prędkość obrotowa dookoła osi L_1L_1 jest $v_w = 0$, ponieważ punkt A jest położony na tej osi, prędkość unoszenia t.j. prędkość obrotowa dookoła osi L_2L_2 jest $v_u = \omega_2 \cdot Ad$, przy czym Ad jest długością prostopadłej, opuszczonej z punktu A na oś O'O". Zestawiając otrzymane dwa wyrażenia na v_b znajdziemy, że

$$\omega_2 \cdot Ad = \omega \cdot Ae.$$

Za uważymy, że iloczyn

$$\omega_2 \cdot Ad = \text{pole} \triangle OACB = OC \cdot Ae$$

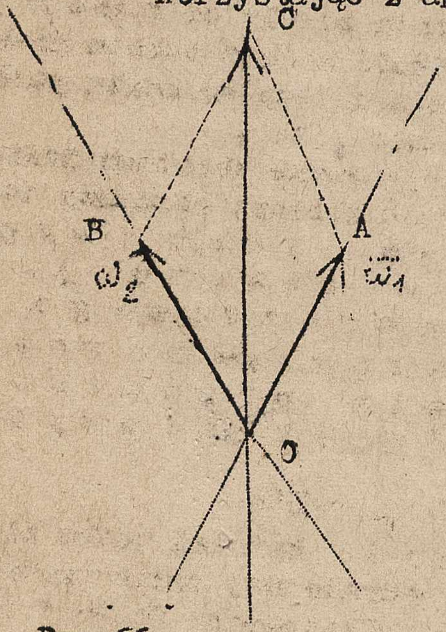
więc $OC \cdot Ae = \omega Ae$

skąd $\omega = OC$

Za tym p r ę d k o ś ć k ą t o w a b e z w z g l ę d n e g o r u c h u o b r o t o w e g o , z ł o ż o n e g o z d w ó c h s k ł a d o w y c h r u c h ó w o b r o t o w y c h d o o k ł a p r z e c i n a j ą c y c h s i ę o s i j e s t g e o m e t r y c z n i e r ó w n ą p r z e k ą t n e j r ó w n o l e g ł o b o k u , z b u d o w a n e g o n a p r ę d k o ś c i a c h k ą t o w y c h ω_1 i ω_2 r u c h ó w s k ł a d o w y c h j a k o n a b o k a c h .

Porównując ten wynik ze składaniem dwóch sił, działających na jeden punkt pod pewnym kątem do siebie, otrzymujemy zupełną analógję /patrz statykę/. Podobnie, jak w statyce składaliśmy kilka sił, których proste działania przecinały się w jednym punkcie, obecnie możemy składać dowolną liczbę prędkości kątowych obrotów dookoła osi, przechodzących przez jeden i ten sam punkt. P r ę d k o ś ć k ą t o w ą b e z w z g l ę d n e g o o b r o t u o k a ż e s i ę g e o m e t r y c z n ą s u m ą p r ę d k o ś c i k ą t o w y c h o b r o t ó w s k ł a d o w y c h i p r z e d s t a w i s i ę z a p o m o c ą z a m y k a j ą c e j s i ę w i e l o b o k u , k t ó r e g o b o k i p o s i a d a j ą d ł u g o ś c i i k i e r u n k i z g o d n e z p r ę d k o ś c i a m i k ą t o w y m i o b r o t ó w s k ł a d o w y c h .

Korzystając z analogii ze statyką zagadnienie o rozkładaniu danego obrotu na kilka obrotów dookoła osi, przecinających się w jednym punkcie, możemy rozwiązywać zupełnie tak, jak w statyce rozkładaliśmy daną siłę na kilka składowych. Np.: Niechaj bryła materialna obraca się dookoła osi OC z prędkością kątową ω /rys.66./. Rozłożenie tego ruchu obrotowego na dwa ruchy obrotowe składowe dookoła osi, przechodzących przez punkt O będzie zupełnie określonym, gdy np. wyznaczymy wielkość i kierunek jednej wielkości kątowej ω_1. Wtedy za pomocą geometrycznego odej-



Rys.66.

mowania wektora ω_1 od wektora ω, znajdziemy wielkość i kierunek prędkości obrotowej ω_2 drugiego składanego ruchu obrotowego.

Na zakończenie jako przykład składania trzech ruchów obrotowych dookoła trzech osi przecinających się w jednym punkcie, rozpatrzymy ruch bryły materialnej dookoła nieruchomego punktu obieżemy nieruchomy punkt, jako początek bezwzględnych, nieruchomych osi OXYZ i jednocześnie jako początek ruchomych względnych osi $O\xi\eta\zeta$, stale z bryłą związanych / rys.67./. Położenie ruchomych osi $O\xi\eta\zeta$ względem nieruchomych OXYZ, określają trzy kąty Euler'a θ, φ, ψ, będące znanymi nam funkcjami czasu t.

$$\theta = \theta/t/, \quad \varphi = \varphi/t/, \quad \psi = \psi/t/$$

Różniczkując te funkcje względem cza-su t, otrzymamy pochodne θ', φ', ψ'. Te pochodne są prędkościami kątowymi /patrz rozdz. IV/ obrotów bryły materialnej dookoła osi, przechodzącej przez nieruchomy punkt O, i odpowiednio prostopadłych do płaszczyzn współrzędnych $ZO\zeta$, XOY, $\xi O\eta$ /w tych bowiem płaszczyznach znajdują się kąty θ, , /.

Zatym θ' jest prędkością kątową obrotów bryły dookoła osi ON /patrz §.4.rozdz VI./. Kierunek tego obrotu w danym momencie czasu t zależy od znaku $\theta'/t/$.

Następnie ψ' jest prędkością kątową obrotu dookoła osi Z, kierunek tego obrotu zależy od znaku $\psi'/t/$.

Wreszcie φ' jest prędkość kątowa obrotu dookoła osi $O\zeta$ i kierunek tego obrotu zależy od znaku pochodnej $\varphi'/t/$ w danej chwili czasu t.

Składając powyższe trzy ruchy obrotowe dookoła oais OZ, $O\zeta$ i ON otrzymamy ruch złożony obrotowy dookoła pewnej osi chwilowej zatym ruch wypadkowy jest ruchem obrotowym dookoła punktu nieruchomego O z prędkością kątową ω równą geometrycznej sumie prędkości kątowych obrotów składowych: θ', φ' i ψ' mianowicie:

$$\overline{\omega} = \overline{\theta'} + \overline{\varphi'} + \overline{\psi'}$$

Rzut prędkości kątowej ruchu złożonego na dowolną oś jest równy alegebraicznej sumie rzutów na tę oś prędkości kątowych obrotów składowych θ', φ' i ψ'.

Oznaczymy, jak w § 4.rozdz.VI-go te rzuty przez p,q i r. Wtedy:

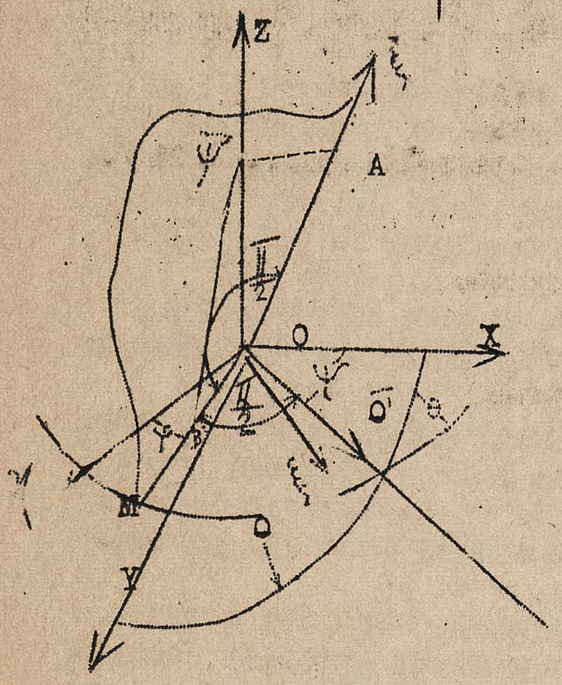
$$p = \omega . \cos(\omega, \xi),$$
$$q = \omega . \cos(\omega, \eta),$$
$$r = \omega . \cos(\omega, \zeta).$$

Wyznaczymy ω, p, q i r. Aby znaleźć wyrażenie na ω, złożymy z początku prędkości kątowe φ', i ψ'. Otrzymaną wypadkową złożymy z θ', wtedy otrzymamy ω. Na rys.67. wektor

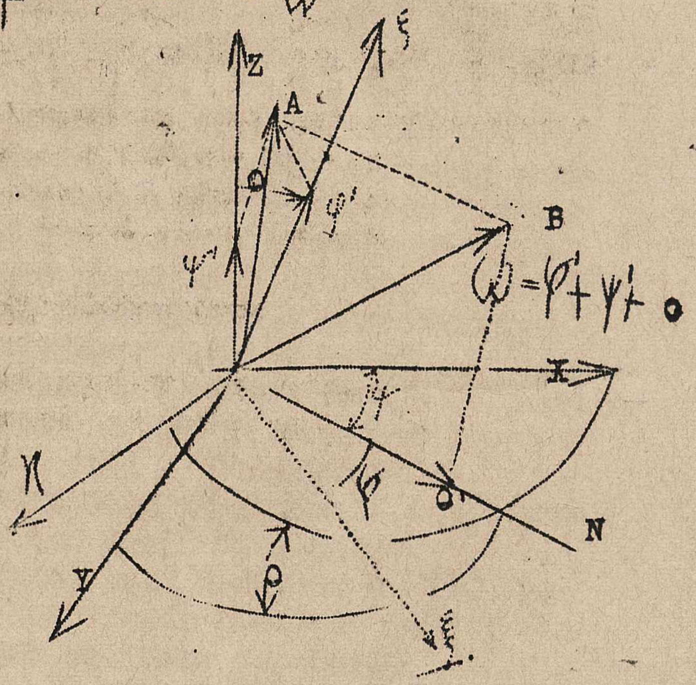
$$\overline{OA} = \overline{\varphi'} + \overline{\psi'}$$

a wektor

$$\overline{OB} = \overline{\varphi'} + \overline{\psi'} + \overline{\theta'} = \overline{\omega}$$



Rys.68



Rys.67

Długość odcinka OA jest:

$$OA = \sqrt{\varphi'^2 \ \psi'^2 + 2\varphi'\psi' . \cos\theta}$$

Zauważywsza, że prosta ON jest prostopadłą do płaszczyzny ZO , wnioskujemy, iż wektor ' jest prostopadłym do wektora $\overline{OA}$ = + . Stąd wynika, następujące wyrażenie na wielkość:

$$\omega = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 + 2\varphi'\psi' . \cos\theta} \quad \ldots /25/$$

, Określimy teraz p,q i r . Wyznaczymy prostą OM przecięcia się płaszczyzny ZO ξ i ξ O η, rys 68. Ta prosta OM tworzy kąty proste z osią O ζ i z prostą ON. Rozłóż-

my prędkość kątową ψ' obrotu dookoła osi OZ na dwie składowe, mające kierunki wzdłuż osi $O\xi$ i prostej OM, mianowicie

$$\overline{OA} = \psi'.\cos\theta$$
$$\overline{OB} = \psi'.\sin\theta$$

W tedy prędkość kątowa obrotu złożonego będzie rozłożoną na składowe, mające kierunki $O\zeta$, ON i OM. Składając z osobna wektory skierowane wzdłuż tych prostych, otrzymamy następujące trzy składowe ω :
wzdłuż prostej OM mamy składową θ',
wzdłuż prostej OM składową równą $\psi'\sin\theta$,
i wzdłuż osi $O\zeta$ - składową równą sumie $\varphi' + \psi'.\cos\theta$.
Rzuty ω na osie $O\xi\eta\zeta$ są równe algebraicznym sumom rzutów powyższych geometrycznych składowych ω. Biorąc pod uwagę, iż

$$\widehat{MO\xi} = \frac{\pi}{2} - \varphi,\ \widehat{MO\eta} = \varphi,\ \widehat{MO\zeta} = \frac{\pi}{2},\ \widehat{NO\xi} = \varphi,\ \widehat{NO\eta} = \frac{\pi}{2} + \varphi,\ \widehat{NO\zeta} = \frac{\pi}{2}.$$

otrzymamy następujące wyrażenia na p,q i r

$$p = \psi' \sin\theta.\sin\varphi + \theta'.\cos\varphi$$
$$q = \psi' \sin\theta.\cos\varphi - \theta'\sin\varphi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots /26/.$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

oooooooOOOOOOOooooooo

Koniec pierwszego tomu
mechaniki teoretycznej

Spis rzeczy.